Übungsblatt 7.

Abgabe bis: **Freitag, 08.11.2019, 12:00**

Aufgabe 1 (Fehlerabschätzungen | 4 Punkte)**.**

(a) Geben Sie die zu erwartenden Konvergenzordnungen in h-Potenzen an von

(i)
$$\|u - I_h u\|_{L^2(T)} \leq ch^?|u|_{H^2(T)}$$
für die Knoteninterpolierenden aus $\mathcal{P}_1$,

(ii)
$$\left\|\nabla^2(u - I_h u)\right\|_{L^2(T)} \leq ch^?|u|_{H^2(T)}$$
für die Knoteninterpolierenden aus $\mathcal{P}_1$,

(iii)
$$\left\|\nabla^2(u - I_h u)\right\|_{L^2(T)} \leq ch^?|u|_{H^3(T)}$$
für die Knoteninterpolierenden aus $\mathcal{P}_2$,

(iv)
$$\sup_{\mathbf{x}\in T}\left|(u - I_h u)(\mathbf{x})\right| \leq ch^?|u|_{H^3(T)}$$
für die Knoteninterpolierenden aus $\mathcal{P}_2$,

(v)
$$\left\|\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}(u - I_h u)\right\|_{L^2(\partial T)} \leq ch^?|u|_{H^3(T)}$$
für die Knoteninterpolierenden aus $\mathcal{P}_2$.

Hinweis. ∇^2 *bezeichnet die Hesse-Matrix.*

(b) Betrachten Sie das Poisson-Problem zu gegebener rechter Seite $f \in L^2(\Omega)$ auf einem konvexen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, diskretisiert mittels linearer Finiter Elemente. Welche Konvergenzordnung bzgl. h-Potenzen ist für einen gewichteten Mittelwert
$$I(u) - I(u_h) = \int_\Omega (u - u_h)w \,\mathrm{d}x$$
mit der Gewichtsfunktion $w \in L^2(\Omega)$ auf quasi-uniformen Gittern zu erwarten?

Aufgabe 2 (Flussauswertung | 4 Punkte)**.**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygonzug berandetes, konvexes Gebiet und $f \in L^2(\Omega)$. Bezeichne u die Lösung der Poisson-Gleichung
$$\begin{aligned} -\Delta u(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}), \quad && \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= 0, && \mathbf{x} \in \Gamma := \partial\Omega. \end{aligned}$$
Der gewichtete Fluss von u ist definiert durch
$$F_\omega(u) := \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\sigma \tag{1}$$
für eine Gewichtsfunktion $\omega \in L^2(\Gamma)$, welche eine Erweiterung $\widetilde{\omega} \in H^1(\Omega)$ besitzt, d.h. es gilt $\gamma(\widetilde{\omega}) = \omega$.

(a) Zeigen Sie:

$$F_\omega(u) = \int_\Omega \big\langle \nabla u(\mathbf{x}), \nabla \widetilde{\omega}(\mathbf{x}) \big\rangle \, \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_\Omega f(\mathbf{x}) \widetilde{\omega}(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{2}$$

(b) Seien u_h die Approximationen von u mittels linearer Finiter Elemente auf quasi-uniformen Gittern. Zeigen Sie, dass wir für den Fehler in der Flussauswertung

$$\big| F_\omega(u) - F_\omega(u_h) \big|$$

eine h-Konvergenz von $\mathcal{O}(h^0)$ (d.h. keine Konvergenz) bzw. $\mathcal{O}(h^1)$ erwarten, wenn dieser mit (1) resp. mit (2) berechnet wird.

Aufgabe 3 (L^2-Projektion | 4 Punkte)**.**

Zeigen Sie für das Intervall $I = [0,1]$ die folgenden Aussagen:

(a) Jede Funktion $u \in C(I)$ mit

$$(u, q)_{L^2(I)} = 0 \quad \text{für alle } q \in \mathcal{P}_r$$

besitzt mindestens $r+1$ Nullstellen in I. Hierbei bezeichnet $\mathcal{P}_r$ den Raum der Polynome vom Grad $\leq r$.

(b) Die L^2-Projektion $\Pi : C(I) \to \mathcal{P}_r$, definiert durch

$$(u - \Pi u, q)_{L^2(I)} = 0 \quad \text{für alle } q \in \mathcal{P}_r,$$

erfüllt die Fehlerabschätzung

$$\|u - \Pi u\|_{L^\infty(I)} \leq \frac{1}{(r+1)!} \big\| u^{(r+1)} \big\|_{L^\infty(I)} \quad \text{für alle } u \in C^{r+1}(I).$$

Aufgabe 4 (Kondition der Systemmatrix | 4 Punkte)**.**

Wir wollen die Kondition einer Finite-Elemente-Matrix abschätzen. Dazu betrachten wir das Poisson-Problem auf einem polygonalen Gebiet Ω und den Raum V_h der stetigen, stückweise linearen Finite Elemente Funktionen auf einer quasi-uniformen Triangulierung von Ω. Ferner sei $v_h = \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i \in V_h$ beliebig.

(a) Zeigen Sie $a(v_h, v_h) \leq C h^{-2} \|v_h\|^2_{L^2(\Omega)}$.

(b) Beweisen Sie für $\mathbf{v}_h = [v_i]_{i=1}^n$, dass

$$c h^2 \|\mathbf{v}_h\|_2^2 \leq \|v_h\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C h^2 \|\mathbf{v}_h\|_2^2.$$

Hinweis. *Aus der Quasi-Uniformität folgt, dass die maximale Anzahl Dreiecke, die in einem Knoten zusammen kommen, beschränkt ist.*

(c) Zeigen Sie, dass sich die Konditionszahl der Finite-Elemente-Matrix maximal wie $\mathcal{O}(h^{-2})$ verhält.

Hinweis. *Verwenden Sie die Identität*

$$\frac{\mathbf{v}_h^\top \mathbf{A}_h \mathbf{v}_h}{\|\mathbf{v}_h\|_2^2} = \frac{a(v_h, v_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_2^2}$$

um den grössten und den kleinsten Eigenwert der Systemmatrix $\mathbf{A}_h$ *abzuschätzen.*