Übungsblatt 7.

Abgabe bis: **Freitag, 11.11.2022, 12:00**

Aufgabe 1 (Fehlerabschätzungen | 4 Punkte).

(a) Geben Sie die zu erwartenden Konvergenzordnungen in h-Potenzen an von

(i)
$$\|u - I_h u\|_{L^2(T)} \leq ch^?|u|_{H^2(T)}$$
für die Knoteninterpolierende aus $\mathcal{P}_1$,

(ii)
$$\left\|\nabla^2(u - I_h u)\right\|_{L^2(T)} \leq ch^?|u|_{H^2(T)}$$
für die Knoteninterpolierende aus $\mathcal{P}_1$,

(iii)
$$\left\|\nabla^2(u - I_h u)\right\|_{L^2(T)} \leq ch^?|u|_{H^3(T)}$$
für die Knoteninterpolierende aus $\mathcal{P}_2$,

(iv)
$$\sup_{\mathbf{x}\in T}\left|(u - I_h u)(\mathbf{x})\right| \leq ch^?|u|_{H^3(T)}$$
für die Knoteninterpolierende aus $\mathcal{P}_2$,

(v)
$$\left\|\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(u - I_h u)\right\|_{L^2(\partial T)} \leq ch^?|u|_{H^3(T)}$$
für die Knoteninterpolierende aus $\mathcal{P}_2$.

Hinweis. ∇^2 *bezeichnet die Hesse-Matrix.*

(b) Betrachten Sie das Poisson-Problem zu gegebener rechter Seite $f \in L^2(\Omega)$ auf einem konvexen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, diskretisiert mittels linearer Finiter Elemente. Welche Konvergenzordnung bzgl. h-Potenzen ist für einen gewichteten Mittelwert
$$I(u) - I(u_h) = \int_\Omega (u - u_h)w\,\mathrm{d}x$$
mit der Gewichtsfunktion $w \in L^2(\Omega)$ auf quasi-uniformen Gittern zu erwarten?

Aufgabe 2 (L^2-Projektion | 4 Punkte).

Zeigen Sie für das Intervall $I = [0, 1]$ die folgenden Aussagen:

(a) Jede Funktion $u \in C(I)$ mit
$$(u, q)_{L^2(I)} = 0 \quad \text{für alle } q \in \mathcal{P}_r$$
besitzt mindestens $r + 1$ Nullstellen in I. Hierbei bezeichnet $\mathcal{P}_r$ den Raum der Polynome vom Grad $\leq r$.

(b) Die L^2-Projektion $\Pi : C(I) \longrightarrow \mathcal{P}_r$, definiert durch

$$(u - \Pi u, q)_{L^2(I)} = 0 \quad \text{für alle } q \in \mathcal{P}_r,$$

erfüllt die Fehlerabschätzung

$$\|u - \Pi u\|_{L^\infty(I)} \leq \frac{1}{(r+1)!} \left\|u^{(r+1)}\right\|_{L^\infty(I)} \quad \text{für alle } u \in C^{r+1}(I).$$

Aufgabe 3 (Interpolation | 4 Punkte).

Sei $\mathcal{T}$ eine beliebige Triangulierung eines polygonalen Gebiets Ω mit

$$V_{\mathcal{T}} := \left\{ v \in C(\overline{\Omega}) \, : \, v|_T \in \mathcal{P}_1(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T} \right\}$$

dem Raum der stetigen, stückweise linearen Finite Elemente Funktionen. Zeigen Sie, dass es keine Interpolation

$$I_{\mathcal{T}} : C^\infty(\overline{\Omega}) \longrightarrow V_{\mathcal{T}}$$

gibt, die $L^2(\Omega)$-stabil ist. Dies bedeutet, es gibt keine Interpolation, die der Ungleichung

$$\|I_{\mathcal{T}} v\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

mit einer positiven Konstante c für alle $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ genügt.

Aufgabe 4 (Kondition der Systemmatrix | 4 Punkte).

Wir wollen die Kondition einer Finite-Elemente-Matrix abschätzen. Dazu betrachten wir das Poisson-Problem auf einem polygonalen Gebiet Ω und den Raum V_h der stetigen, stückweise linearen Finite Elemente Funktionen auf einer quasi-uniformen Triangulierung von Ω. Ferner sei $v_h = \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i \in V_h$ beliebig.

(a) Zeigen Sie $a(v_h, v_h) \leq C h^{-2} \|v_h\|^2_{L^2(\Omega)}$.

(b) Beweisen Sie für $\mathbf{v}_h = [v_i]_{i=1}^n$, dass

$$c h^2 \|\mathbf{v}_h\|_2^2 \leq \|v_h\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C h^2 \|\mathbf{v}_h\|_2^2.$$

Hinweis. *Aus der Quasi-Uniformität folgt, dass die maximale Anzahl Dreiecke, die in einem Knoten zusammen kommen, beschränkt ist.*

(c) Zeigen Sie, dass sich die Konditionszahl der Finite-Elemente-Matrix maximal wie $\mathcal{O}(h^{-2})$ verhält.

Hinweis. *Verwenden Sie die Identität*

$$\frac{\mathbf{v}_h^\top \mathbf{A}_h \mathbf{v}_h}{\|\mathbf{v}_h\|_2^2} = \frac{a(v_h, v_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_2^2}$$

um den grössten und den kleinsten Eigenwert der Systemmatrix $\mathbf{A}_h$ abzuschätzen.