Übungsblatt 6.

Abgabe bis: **Freitag, 04.11.2022, 12:00**

Aufgabe 1 (Bramble-Hilbert-Lemma | 4 Punkte).

Beweisen Sie das Bramble-Hilbert-Lemma für $m = 1$ und $\Omega = (0,1)^2$ unter der Voraussetzung, dass der Mittelungsoperator

$$I : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathcal{P}_0, \quad Iv := \int_\Omega v(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

verwendet wird.

Aufgabe 2 (quasi-uniforme Zerlegungen | 4 Punkte).

Eine Familie von Zerlegungen $\{\mathcal{T}_h\}$ heisst *nicht entartet*, wenn es eine Zahl $\kappa_e > 0$ gibt, so dass jedes Element $T \in \mathcal{T}_h$ einen Kreis von Radius ρ_T enthält mit

$$\rho_T \geq \frac{h_T}{\kappa_e}.$$

Hierbei bezeichne $h_T := \operatorname{diam}(T)/2$ den halben Durchmesser von T. Weiter sei $h := \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$, dann heisst die Familie *quasi-uniform*, falls es eine Zahl $\kappa_u > 0$ gibt, so dass für jedes $T \in \mathcal{T}_h$ gilt

$$\rho_T \geq \frac{h}{\kappa_u}.$$

Zeigen Sie, dass eine Familie $\{\mathcal{T}_h\}$ genau dann quasi-uniform ist, wenn sie nicht entartet ist und es positive Konstanten $c, C > 0$ gibt, so dass

$$c \operatorname{diam} T_1 \leq \operatorname{diam} T_2 \leq C \operatorname{diam} T_1 \quad \text{für alle } T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h.$$

Aufgabe 3 (variable Koeffizienten | 4 Punkte).

Betrachten Sie das Poisson-Problem mit variablem Koeffizienten $a \in L^\infty(\Omega)$:

$$-\operatorname{div}(a \nabla u) = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \Gamma := \partial\Omega.$$

Dieses Problem sei mittels stetiger, stückweise linearer Finiter Elemente auf einem Dreiecksnetz $\mathcal{T}$ diskretisiert. Zeigen Sie, dass man die gleiche Lösung u_h erhält unabhängig davon, ob man a als variabel auf jedem Element $T \in \mathcal{T}$ der Triangulierung ansieht oder auf jedem Dreieck durch eine konstante Funktion ersetzt. Wie sind die Konstanten hierzu zu berechnen?

Aufgabe 4 (Dualitätsargument | 4 Punkte).

In Aufgabe 6 des zweiten Programmierblattes ist zu beobachten, dass die approximierte Lösung u_h und die exakte Lösung u die Eigenschaft $\int_\Omega u - u_h \,\mathrm{d}x = \mathcal{O}\big(h^2\big)$ erfüllen. Seien nun $\Omega = (0,1)^2$, $f \in L^2(\Omega)$ und das Variationsproblem mit homogenen Dirichlet-Daten

$$\text{Finde } u \in H_0^1(\Omega) \text{, s.d.} \quad \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle \,\mathrm{d}x =: a(u,v) = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x \quad \text{f.a. } v \in H_0^1(\Omega)$$

gegeben. Zeigen Sie die Beobachtung aus dem Programmierblatt in diesem Fall, ohne die Resultate der Sätze aus Kapitel 6 des Skriptes zu benutzen. Betrachten Sie stattdessen eine Funktion $\psi \in H^2(\Omega)$, die die Eigenschaft

$$a(v, \psi) = (v, 1)_{L^2(\Omega)} \quad \text{f.a. } v \in H_0^1(\Omega)$$

erfüllt.