Übungsblatt 6.

Abgabe bis: **Freitag, 01.11.2019, 12:00**

Aufgabe 1 (Bramble-Hilbert-Lemma | 4 Punkte).

Beweisen Sie das Bramble-Hilbert-Lemma für $m = 1$ und $\Omega = (0,1)^2$ unter der Voraussetzung, dass der Mittelungsoperator, I, verwendet wird,

$$I\colon H^1(\Omega) \to \mathcal{P}_0, \quad Iv := \int_\Omega v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Aufgabe 2 (quasi-uniforme Zerlegungen | 4 Punkte).

Eine Familie von Zerlegungen $\{\mathcal{T}_h\}$ heisst *nicht entartet*, wenn es eine Zahl $\kappa_e > 0$ gibt, so dass jedes Element $T \in \mathcal{T}_h$ einen Kreis von Radius ρ_T enthält mit

$$\rho_T \geq \frac{h_T}{\kappa_e}.$$

Hierbei bezeichne $h_T := \operatorname{diam}(T)/2$ den halben Durchmesser von T. Weiter sei $h := \max_{T\in\mathcal{T}_h} h_T$, dann heisst die Familie *quasi-uniform*, falls es eine Zahl $\kappa_u > 0$ gibt, so dass für jedes $T \in \mathcal{T}_h$ gilt

$$\rho_T \geq \frac{h}{\kappa_u}.$$

Zeigen Sie, dass eine Familie $\{\mathcal{T}_h\}$ genau dann quasi-uniform ist, wenn sie nicht entartet ist und es positive Konstanten $c, C > 0$ gibt, so dass

$$c \operatorname{diam} T_1 \leq \operatorname{diam} T_2 \leq C \operatorname{diam} T_1 \quad \text{für alle } T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h.$$

Aufgabe 3 (variable Koeffizienten | 4 Punkte).

Betrachten Sie das Poisson-Problem mit variablem Koeffizienten $a \in L^\infty(\Omega)$:

$$-\operatorname{div}(a\,\nabla u) = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \Gamma := \partial\Omega.$$

Dieses Problem sei mittels stetiger, stückweise linearer Finiter Elemente auf einem Dreiecksnetz $\mathcal{T}$ diskretisiert. Zeigen Sie, dass man die gleiche Lösung u_h erhält unabhängig davon, ob man a als variabel auf jedem Element $T \in \mathcal{T}$ der Triangulierung ansieht oder auf jedem Dreieck durch eine konstante Funktion ersetzt. Wie sind die Konstanten hierzu zu berechnen?

Aufgabe 4 (Interpolation | 4 Punkte).

Sei $\mathcal{T}$ eine beliebige Triangulierung eines polygonalen Gebiets Ω mit

$$V_\mathcal{T} := \big\{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_T \in \mathcal{P}_1(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T}\big\}$$

dem Raum der stetigen, stückweise linearen Finite Elemente Funktionen. Zeigen Sie, dass es keine Interpolation

$$I_\mathcal{T}\colon C^\infty(\overline{\Omega}) \to V_\mathcal{T}$$

gibt, die $L^2(\Omega)$-stabil ist. Dies bedeutet, es gibt keine Interpolation, die der Ungleichung

$$\|I_\mathcal{T} v\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|v\|_{L^2(\Omega)}$$

mit einer positiven Konstante c für alle $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ genügt.