Universität Basel

Numerik der partiellen Differentialgleichungen HS 2022
Prof. Dr. H. Harbrecht

Übungsblatt 5.

Abgabe bis: **Freitag, 28.10.2022, 12:00**

Aufgabe 1 (Massenmatrix | 4 Punkte).

Seien Ω ein beschränktes Gebiet mit einer Triangulierung $\mathcal{T}$ und φ_i, φ_j zwei Basisfunktionen. Dann wird die Massenmatrix definiert als

$$\mathbf{M} := \left[\int_\Omega \varphi_j(\mathbf{x})\varphi_i(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} \right]_{i,j}.$$

Wir betrachten nun lineare Finite Elemente zur nodalen Basis.

(a) Berechnen Sie die lokale Massenmatrix $\mathbf{M}_T$ für jedes Dreieck $T \in \mathcal{T}$. Die lokale Massenmatrix $\mathbf{M}_T$ für ein gegebenes Dreieck T lässt sich in baryzentrischen Koordinaten ausdrücken durch

$$\mathbf{M}_T := \left[m_{i,j}^T \right]_{i,j=1}^3 \quad \text{mit} \quad m_{i,j}^T := \int_T \lambda_j(\mathbf{x})\lambda_i(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Hinweis. *Für die Berechnung der Einträge der lokalen Massenmatrix bezüglich baryzentrischer Koordinaten können Sie die bekannte Formel*

$$\int_T \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{\alpha}}\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{2\boldsymbol{\alpha}!}{(|\boldsymbol{\alpha}| + 2)!}|T|$$

verwenden.

(b) Die Massenmatrix kann zur Diskretisierung der rechten Seite benutzt werden (vergleiche auch Programmierblatt 2). Dabei müssen die Integrale

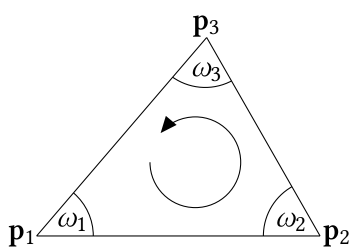
$$\int_{\mathrm{supp}(\varphi_i)} f(\mathbf{x})\varphi_i(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

für alle Basisfunktionen φ_i gebildet werden. Hierzu interpolieren wir f stückweise linear in den Gitterpunkten. Den zugehörigen Knotenvektor bezeichnen wir mit $\mathbf{f}$. Folgern Sie, dass

$$\int_{\mathrm{supp}(\varphi_i)} f(\mathbf{x})\varphi_i(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} \approx [\mathbf{M}\mathbf{f}]_i$$

gilt.

Aufgabe 2 (lokale Elementmatrizen | 4 Punkte).



Zur Diskretisierung des Poisson-Problems mittels linearer finiter Elemente wird die Systemmatrix aus den *lokalen Elementmatrizen* zusammensetzt. Die lokale Elementmatrix $\mathbf{A}_T$ für ein gegebenes Dreieck T lässt sich in baryzentrischen Koordinaten ausdrücken:

$$\mathbf{A}_T := \left[a_{i,j}^T\right]_{i,j=1}^3 \quad \text{mit} \quad a_{i,j}^T := \int_T \left\langle \nabla \lambda_j(\mathbf{x}), \nabla \lambda_i(\mathbf{x}) \right\rangle \, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für das Dreieck T, gegeben durch die Eckpunkte $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1)$, $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2)$ und $\mathbf{p}_3 = (x_3, y_3)$ (siehe obige Skizze), die lokale Elementmatrix die folgende Form besitzt:

$$\mathbf{A}_T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cot(\omega_3) + \cot(\omega_2) & -\cot(\omega_3) & -\cot(\omega_2) \\ -\cot(\omega_3) & \cot(\omega_3) + \cot(\omega_1) & -\cot(\omega_1) \\ -\cot(\omega_2) & -\cot(\omega_1) & \cot(\omega_2) + \cot(\omega_1) \end{bmatrix}.$$

Hinweis. *Wegen der Invarianz sämtlicher hier involvierten Grössen unter Isometrien kann man annehmen, dass die Eckpunkte* $(0,0), (\alpha, 0)$ *und* (β, γ) *mit* $\alpha, \gamma \neq 0$ *sind.*

(b) Zeigen Sie, dass man die lokale Elementmatrix mit Hilfe der Vektoren

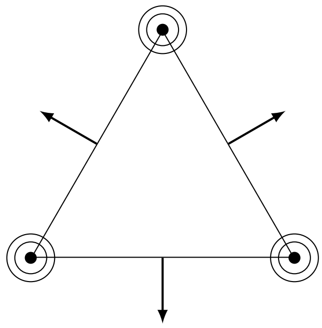
$$\mathbf{a} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1, \quad \mathbf{b} = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{c} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3,$$

schreiben kann als

$$\mathbf{A}_T = \frac{1}{2} \frac{1}{\left|\det\left([\mathbf{a}, \mathbf{c}]\right)\right|} \begin{bmatrix} -\mathbf{b}^\top\mathbf{c} - \mathbf{a}^\top\mathbf{b} & \mathbf{b}^\top\mathbf{c} & \mathbf{a}^\top\mathbf{b} \\ \mathbf{b}^\top\mathbf{c} & -\mathbf{a}^\top\mathbf{c} - \mathbf{b}^\top\mathbf{c} & \mathbf{a}^\top\mathbf{c} \\ \mathbf{a}^\top\mathbf{b} & \mathbf{a}^\top\mathbf{c} & -\mathbf{a}^\top\mathbf{b} - \mathbf{a}^\top\mathbf{c} \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 3 (Argyris-Dreieck | 4 Punkte).

(a) Zeigen Sie, dass zu gegebenen Funktionswerten, ersten und zweiten Ableitungen in den Eckpunkten eines Dreiecks T genau ein Polynom $p \in \mathcal{P}_5$ gibt, das mit den vorgegebenen Daten an den Ecken übereinstimmt und dessen Normalableitungen an den Seitenmitten einen vorgegebenen Wert annehmen. Dieses Element heisst Argyris-Dreieck.



(b) Es sei $\mathcal{T}$ eine Zerlegung des Gebiets Ω in Dreiecke und

$$V := \Big\{ v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \;\Big|\; \text{für alle } T \in \mathcal{T} \text{ ist } v|_T \in \mathcal{P}_5 \text{ und Funktionswerte, 1. und 2. Ableitungen stimmen in den Knoten überein, und die Werte der Normalableitungen an den Seitenmitten stimmen überein} \Big\}$$

der zugehörige Finite-Element-Raum. Zeigen Sie, dass $V \subset C^1(\overline{\Omega})$ gilt.

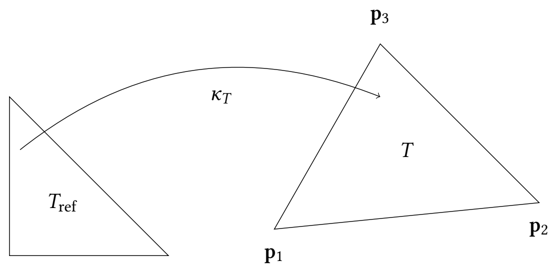
Aufgabe 4 (Argyris Basis Funktionen | 4 Punkte).

Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit Eckpunkten $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ und $\mathbf{p}_3$ und T_{ref} das Referenzdreieck mit Eckpunkten $(0,0)$ $(1,0)$ und $(0,1)$. Seien $j = 0,\dots,20$ und $\psi_j : T \longrightarrow \mathbb{R}$ die 21 Argyris-Basisfunktionen, für die jeweils eine der folgenden 21 Auswertungen

$\psi_j,\ \partial_x\psi_j,\ \partial_y\psi_j,\ \partial_{xx}\psi_j,\ \partial_{xy}\psi_j,\ \partial_{yy}\psi_j$ ausgewert jeweils in $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ und $\mathbf{p}_3$
$\partial_{\mathbf{n}}\psi_j$ ausgewertet im Mittelpunkt von $\overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}$, $\overline{\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3}$ und $\overline{\mathbf{p}_3\mathbf{p}_1}$

gleich 1 ist und alle anderen gleich 0, wobei $\mathbf{n}$ die nach aussen zeigende Normale an die Kante $\overline{\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j}$ von T ist. Analog sind die Argyris-Basisfunktionen $\hat{\phi}_j$, $j = 0,\dots,20$, auf dem Referenzdreieck T_{ref} definiert.
Sei weiter $\kappa_T : T_{\text{ref}} \longrightarrow T$ die Parametrisierung, so dass

$$\kappa_T(\hat{x},\hat{y}) = \mathbf{p}_1 + \mathbf{a}\hat{x} + \mathbf{b}\hat{y} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{A}\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a} := \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1,\ \mathbf{b} := \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1 \text{ und } \mathbf{A} := [\mathbf{a},\mathbf{b}].$$



Für ein $j = 0,\dots,20$ sind $\alpha_i^{(j)}$, $i = 0,\dots,20$, die Koeffizienten, die für $x \in T$

$$\psi_j(x) = \sum_{i=0}^{20} \alpha_i^{(j)}\hat{\phi}_i\big(\kappa_T^{-1}(x)\big)$$

erfüllen. Wir wollen nun diese Koeffizienten α_i näher beschreiben.

(a) Zeigen Sie, dass gilt

$$A^{-\mathsf{T}}\begin{pmatrix}\alpha_1^{(1)}\\ \alpha_2^{(1)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

indem Sie $\nabla\psi_1$ beim Punkt $\mathbf{p}_1$ auswerten.

(b) Zeigen Sie, dass gilt

$$\frac{1}{(\det \mathbf{A})^2}\begin{bmatrix} b_2^2 & -2a_2b_2 & a_2^2 \\ -b_1b_2 & a_2b_1 + a_1b_2 & -a_1a_2 \\ b_1^2 & -2a_1b_1 & a_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_3^{(3)}\\ \alpha_4^{(3)}\\ \alpha_5^{(3)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},$$

indem Sie $\mathbf{H}\psi_3$, d.h. die Hessematrix von ψ_3, im Punkt $\mathbf{p}_1$ auswerten.

(c) Zeigen Sie, dass für $\mathbf{x}^* = \mathbf{p} + \mathbf{a}/2$, d.h. im Mittelpunkt der Kante $\overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}$, gilt

$$\partial_{\mathbf{n}}\psi_{18}(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})\|\mathbf{a}\|}\left(\alpha_{18}^{(18)}\|\mathbf{a}\|^2 + \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 18}}^{20}\alpha_i^{(18)}\partial_{\hat{x}}\hat{\phi}_i\big(\kappa_T^{-1}(\mathbf{x}^*)\big)\right).$$