

Übungsblatt 5.

Abgabe bis: **Freitag, 25.10.2019, 12:00**

**Aufgabe 1** (Massenmatrix | 4 Punkte).

Seien  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet mit einer Triangulierung  $\mathcal{T}$  und  $\varphi_i, \varphi_j$  zwei Basisfunktionen. Dann wird die Massenmatrix definiert als

$$\mathbf{M} := \left[ \int_{\Omega} \varphi_j(\mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right]_{i,j}.$$

Wir betrachten nun lineare Finite Elemente zur nodalen Basis.

- (a) Berechnen Sie die lokale Massenmatrix  $\mathbf{M}_T$  für jedes Dreieck  $T \in \mathcal{T}$ . Die lokale Massenmatrix  $\mathbf{M}_T$  für ein gegebenes Dreieck  $T$  lässt sich in baryzentrischen Koordinaten ausdrücken durch

$$\mathbf{M}_T := [m_{i,j}^T]_{i,j=1}^3 \quad \text{mit} \quad m_{i,j}^T := \int_T \lambda_j(\mathbf{x}) \lambda_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Hinweis. Für die Berechnung der Einträge der lokalen Massenmatrix bezüglich baryzentrischer Koordinaten können Sie die bekannte Formel

$$\int_T \lambda^\alpha \, d\mathbf{x} = \frac{2\alpha!}{(|\alpha| + 2)!} |T|$$

verwenden.

- (b) Die Massenmatrix kann zur Diskretisierung der rechten Seite benutzt werden (vergleiche auch Programmierblatt 2). Dabei müssen die Integrale

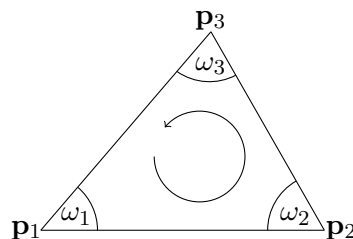
$$\int_{\text{supp}(\varphi_i)} f(\mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

für alle Basisfunktionen  $\varphi_i$  gebildet werden. Hierzu interpolieren wir  $f$  stückweise linear in den Gitterpunkten. Den zugehörigen Knotenvektor bezeichnen wir mit  $\mathbf{f}$ . Folgern Sie, dass

$$\int_{\text{supp}(\varphi_i)} f(\mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \approx [\mathbf{M}\mathbf{f}]_i$$

gilt.

**Aufgabe 2** (lokale Elementmatrizen | 4 Punkte).



Zur Diskretisierung des Poisson-Problems mittels linearer finiter Elemente wird die Systemmatrix aus den *lokalen Elementmatrizen* zusammensetzt. Die lokale Elementmatrix  $\mathbf{A}_T$  für ein gegebenes Dreieck  $T$  lässt sich in baryzentrischen Koordinaten ausdrücken:

$$\mathbf{A}_T := [a_{i,j}^T]_{i,j=1}^3 \quad \text{mit} \quad a_{i,j}^T := \int_T \langle \nabla \lambda_j(\mathbf{x}), \nabla \lambda_i(\mathbf{x}) \rangle \, d\mathbf{x}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass für das Dreieck  $T$ , gegeben durch die Eckpunkte  $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1)$ ,  $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2)$  und  $\mathbf{p}_3 = (x_3, y_3)$  (siehe obige Skizze), die lokale Elementmatrix die folgende Form besitzt:

$$\mathbf{A}_T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cot(\omega_3) + \cot(\omega_2) & -\cot(\omega_3) & -\cot(\omega_2) \\ -\cot(\omega_3) & \cot(\omega_3) + \cot(\omega_1) & -\cot(\omega_1) \\ -\cot(\omega_2) & -\cot(\omega_1) & \cot(\omega_2) + \cot(\omega_1) \end{bmatrix}.$$

Hinweis. Wegen der Invarianz sämtlicher hier involvierten Größen unter Isometrien kann man annehmen, dass die Eckpunkte  $(0, 0)$ ,  $(\alpha, 0)$  und  $(\beta, \gamma)$  mit  $\alpha, \gamma \neq 0$  sind.

- (b) Zeigen Sie, dass man die lokale Elementmatrix mit Hilfe der Vektoren

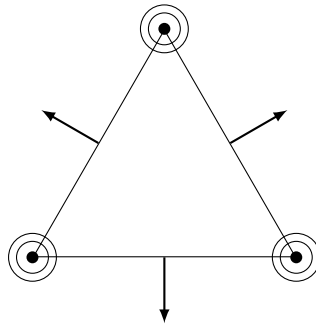
$$\mathbf{a} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1, \quad \mathbf{b} = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{c} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3,$$

schreiben kann als

$$\mathbf{A}_T = \frac{1}{2} \frac{1}{|\det([\mathbf{a}, \mathbf{c}])|} \begin{bmatrix} -\mathbf{b}^\top \mathbf{c} - \mathbf{a}^\top \mathbf{b} & \mathbf{b}^\top \mathbf{c} & \mathbf{a}^\top \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^\top \mathbf{c} & -\mathbf{a}^\top \mathbf{c} - \mathbf{b}^\top \mathbf{c} & \mathbf{a}^\top \mathbf{c} \\ \mathbf{a}^\top \mathbf{b} & \mathbf{a}^\top \mathbf{c} & -\mathbf{a}^\top \mathbf{b} - \mathbf{a}^\top \mathbf{c} \end{bmatrix}.$$

### Aufgabe 3 (Argyris-Dreieck | 4 Punkte).

- (a) Zeigen Sie, dass zu gegebenen Funktionswerten, ersten und zweiten Ableitungen in den Eckpunkten eines Dreiecks  $T$  genau ein Polynom  $p \in \mathcal{P}_5$  gibt, das mit den vorgegebenen Daten an den Ecken übereinstimmt und dessen Normalableitungen an den Seitenmitten einen vorgegebenen Wert annehmen. Dieses Element heisst Argyris-Dreieck.



- (b) Es sei  $\mathcal{T}$  eine Zerlegung des Gebiets  $\Omega$  in Dreiecke und

$$V := \left\{ v: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{für alle } T \in \mathcal{T} \text{ ist } v|_T \in \mathcal{P}_5 \text{ und Funktionswerte,} \\ \text{1. und 2. Ableitungen stimmen in den Knoten überein,} \\ \text{und die Werte der Normalableitungen} \\ \text{an den Seitenmitten stimmen überein} \end{array} \right\}$$

der zugehörige Finite-Element-Raum. Zeigen Sie, dass  $V \subset C^1(\bar{\Omega})$  gilt.

### Aufgabe 4 (Gelfandscher Dreier | 4 Punkte).

Seien  $V, H$  Hilbert-Räume und es gelte  $V \subset H$ . Die Inklusion  $\iota: V \rightarrow H$  sei stetig, injektiv und  $\text{img}(\iota)$  sei dicht in  $H$ . Ferner gelte  $\|\iota v\|_H \leq \|v\|_V$ . Die Norm auf  $V'$  sei in kanonischer Weise gegeben gemäss

$$\|\ell\|_{V'} := \sup_{0 \neq v \in V} \frac{\ell(v)}{\|v\|_V}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass sich jedes  $h \in H$  als stetiges, lineares Funktional über  $V$  auffassen lässt. Betrachten Sie dazu  $\ell_h: V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\ell_h(v) := (h, v)_H$ .
- (b) Schliessen Sie, dass  $\iota': H \rightarrow V'$ ,  $\iota'(h) := \ell_h$  eine Inklusion definiert, mit  $\|\iota'(h)\|_{V'} \leq \|h\|_H$ .
- (c) Zeigen Sie, dass die Inklusion  $\iota'$  injektiv ist.
- (d) Zeigen Sie, dass  $\text{img}(\iota')$  in  $V'$  dicht ist.

Hinweis. (i) Das Bild  $\text{img}(\iota')$  ist dicht in  $V'$  genau dann, wenn für jedes  $\psi \in V''$ , welches für alle  $h \in H$

$$\psi(\iota'h) = 0$$

erfüllt,  $\psi = 0$  folgt.

(ii) Da  $V$  ein Hilbert-Raum und damit auch reflexiv ist, gibt es für jedes  $\psi \in V''$  ein  $v \in V$  so, dass für alle  $\ell \in V'$  gilt:

$$\psi(\ell) = \ell(v).$$