Übungsblatt 4.

Abgabe bis: **Freitag, 18.10.2019, 12:00**

Aufgabe 1 (baryzentrische Koordinaten I | 4 Punkte)**.**

Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ ein nichtentartetes Dreieck mit den Eckpunkten $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$. Die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes $\mathbf{p} = (x, y) \in T$ sind dann gegeben durch den eindeutigen Lösungsvektor $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^\intercal$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass sich die Restriktionen der nodalen Basisfunktionen auf das Dreieck T in baryzentrischen Koordinaten schreiben lassen als

$$\varphi_1(x, y) = \lambda_1(x, y), \quad \varphi_2(x, y) = \lambda_2(x, y), \quad \varphi_3(x, y) = \lambda_3(x, y).$$

Dabei bezeichnen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, die mit den entsprechenden Ecken des Dreiecks assoziierten Basisfunktionen.

Aufgabe 2 (baryzentrische Koordinaten II | 4 Punkte)**.**

Betrachten Sie auf dem Referenzdreieck T_{ref} mit baryzentrischen Koordinaten $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ für festes $k \in \mathbb{N}$ die Lagrange-Knotenmenge vom Grad k, gegeben durch

$$\left\{ \mathbf{x}_{i,j,k} := \left(\frac{i}{k}, \frac{j}{k}, \frac{k-i-j}{k} \right) \;\middle|\; 0 \le i + j \le k \right\}$$

Bekanntlich sind dies $n = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ verschiedene Punkte.

(a) Zeigen Sie, dass je $n - 1$ dieser Punkte auf k Linien der Form

$$L_i^s = \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in T_{\text{ref}} \;\middle|\; \lambda_s = \frac{i}{k} \right\} \text{ für } 0 \le i < k \text{ und } 0 \le s \le 2,$$

also auf Parallelen zu den Kanten von T_{ref}, liegen.

(b) Geben Sie die nodale Basis von $\mathcal{P}_k(T_{\text{ref}})$ zu den obigen Punkten $\{\mathbf{x}_{i,j,k}\}$ in baryzentrischen Koordinanten an.

Aufgabe 3 (Quadratur | 4 Punkte)**.**

Gegeben sei ein Dreieck $T \subset \mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$. Zeigen sie für ein Polynom $p \in \mathcal{P}_3(T)$ die Quadraturformel

$$\int_T p(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{|T|}{60} \left(3 \sum_{i=0}^{2} p(\mathbf{x}_i) + 8 \sum_{0 \le i < j \le 2} p(\mathbf{x}_{i,j}) + 27 p(\mathbf{x}_S) \right),$$

wobei $\mathbf{x}_{i,j} := \frac{1}{2}(\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)$ und $\mathbf{x}_S := \frac{1}{3}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$ sei. Zeigen Sie weiter, dass dies nicht für alle Polynome $p \in \mathcal{P}_4(T)$ gilt.

Hinweis. *Benutzen Sie, dass für einen Simplex $T \in \mathbb{R}^d$ mit baryzentrischen Koordinaten $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_d)$ gilt*

$$\int_T \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{\alpha}} \,\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{\boldsymbol{\alpha}!d!}{(|\boldsymbol{\alpha}| + d)!}|T|,$$

wobei $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^{d+1}$ ein beliebiger Multiindex ist.

Aufgabe 4 (Galerkin-Verfahren | 4 Punkte)**.** Führen Sie die Galerkin-Diskretisierung für das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u'' + cu &= f \quad \text{in } \Omega := (0,1), \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma := \partial\Omega, \end{aligned}$$

durch, wobei die Konstante c nichtnegativ sei. Dazu sei für $n \in \mathbb{N}$ eine uniforme "Triangulierung" durch die Intervalle $\mathcal{T}_h = \{[i/n, (i+1)/n] \colon i = 0, \dots, n-1\}$ gegeben. Als Ansatz- und Testraum seien stückweise lineare finite Elemente vorgegeben:

$$V_h := \{v \in C(\overline{\Omega}) : \ v|_\Gamma = 0 \text{ und } v|_T \in \mathcal{P}_1(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h\} \subset H_0^1(\Omega).$$

Stellen Sie das Gleichungssystem $\mathbf{A}_h \mathbf{x}_h = \mathbf{b}_h$ bezüglich der nodalen Basis von V_h auf.

Hinweis. *Die nodale Basis ist in der folgenden Skizze für $n = 8$ abgebildet:*