Übungsblatt 3.

Abgabe bis: **Freitag, 14.10.2022, 12:00**

Aufgabe 1 (Neumann-Problem | 4 Punkte).

Seien Ω ein Polygon und $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_M\}$ eine Zerlegung von Ω in Dreieck- oder Viereckelementen und $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\partial\Omega)$ Funktionen, die die Kompatibilitätsbedingung

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} g \,\mathrm{d}\sigma = 0$$

erfüllen. Seien $x_1, \dots, x_N$ die voneinander verschiedenen Eckpunkte der Elemente $T_1, \dots, T_M$, $V_N := \{\phi_i \mid \phi_i(x_j) = \delta_{ij} \text{ mit } i,j = 1, \dots, N\}$ die nodale Basis und $\overline{H}^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) \mid \int_\Omega u \,\mathrm{d}x = 0\}$. Seien nun $V := \operatorname{span}(V_N) \cap \overline{H}^1(\Omega)$ und die folgende Variationsaufgabe gegeben:

$$\text{Finde } u \in \overline{H}^1(\Omega) \text{ s.d. } \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} g v \,\mathrm{d}x \quad \text{f.a. } v \in \overline{H}^1(\Omega). \tag{1}$$

(a) Die Diskretisierung von (1) mittels V ist äquivalent zum Lösen eines Gleichungssystems der folgenden Form:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{P}^\intercal \end{pmatrix} \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

wobei $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{1} \in \mathbb{R}^N$. Geben Sie die auftretenden Matrizen und Ker $\boldsymbol{B}$ an.

(b) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{P}^\intercal & 0 \end{pmatrix}$$

regulär ist. Zeigen Sie, dass die gesuchte Lösung $\boldsymbol{u}$ von (2) durch das Lösen von

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{P}^\intercal & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhalten werden kann.

Aufgabe 2 (Robin-Randbedingungen | 4 Punkte).

Betrachtet wird die Poissongleichung mit Robin-Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta u(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) + \kappa(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \end{aligned}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein glatt berandetes Gebiet und $\mathbf{n}$ die nach aussen gerichtete Normale sei.

(a) Stellen Sie die Variationsformulierung für dieses Randwertproblem auf.

(b) Seien $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma)$, sowie $\kappa \in L^\infty(\Gamma)$ und es gebe ein $\kappa_0 > 0$, so dass fast überall $\kappa(\mathbf{x}) \geq \kappa_0$ gilt. Zeigen Sie, dass das Robin-Randwertproblem unter diesen Voraussetzungen eine eindeutige Lösung besitzt.

Hinweis. *Zum Beweis der Elliptizität können Sie die Aussage der verallgemeinerten Friedrichs'schen Ungleichung benutzen: Es existiert eine nur von Ω und Γ abhängige Konstante $C > 0$, sodass*

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C \left(|u|^2_{H^1(\Omega)} + \|\gamma(u)\|^2_{L^2(\Gamma)} \right)$$

für alle $u \in H^1(\Omega)$ erfüllt ist.

Aufgabe 3 (Lemma von Strang | 4 Punkte).

Seien V ein Hilbert-Raum und $W \subset V$ ein abgeschlossener, linearer Unterraum und seien weiter $a \in B(V;V')$, $b \in B(W;W')$, $\ell \in V'$ und $m \in W'$, wobei a V-elliptisch ist mit der Konstante $c_a > 0$ und b W-elliptisch ist mit der Konstante $c_b > 0$. Schliesslich seien $u_0 \in V$ und $u_1, u_2, u_3 \in W$ die Lösungen der Variationsprobleme:

$$\begin{aligned}
&\text{Suche } u_0 \in V, \text{ so dass} \quad a(u_0, v) = \ell(v) \quad \text{für alle } v \in V,\\
&\text{suche } u_1 \in W, \text{ so dass} \quad a(u_1, w) = \ell(w) \quad \text{für alle } w \in W,\\
&\text{suche } u_2 \in W, \text{ so dass} \quad a(u_2, w) = m(w) \quad \text{für alle } w \in W,\\
&\text{suche } u_3 \in W, \text{ so dass} \quad b(u_3, w) = m(w) \quad \text{für alle } w \in W.
\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\|u_2 - u_1\|_V \leq \frac{\|m - \ell\|_{W'}}{c_a}.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\|u_3 - u_2\|_V \leq \frac{\|a - b\|_{B(W;W')}}{c_b} \|u_2\|_V.$$

(c) Schliessen Sie, dass

$$\begin{aligned}
\|u_3 - u_0\|_V \leq\ & \frac{\|a - b\|_{B(W;W')}}{c_b} \left(\frac{\|m - \ell\|_{W'}}{c_a} + \frac{\|a\|_{B(V;V')}}{c_a} \inf_{w \in W} \|u_0 - w\|_V + \|u_0\|_V \right)\\
&+ \frac{\|m - \ell\|_{W'}}{c_a} + \frac{\|a\|_{B(V;V')}}{c_a} \inf_{w \in W} \|u_0 - w\|_V.
\end{aligned}$$

Hinweis. *Seien X, Y Banach-Räume, dann bezeichnen wir mit $B(X;Y)$ den Banach-Raum aller stetigen, linearen Operatoren von X nach Y mit der (kanonischen Norm)*

$$\|F\|_{B(X;Y)} := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|F(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Insbesondere ist $X' = B(X;\mathbb{R})$.

Aufgabe 4 (Koordinaten-Transformation | 4 Punkte).

Es seien $K, \widehat{K} \subset \mathbb{R}^2$ beschränkte, offene Mengen und $\Phi : \widehat{K} \longrightarrow K$ ein Diffeomorphismus. Für $\hat{\mathbf{x}} \in \widehat{K}$ bezeichne $\mathbf{x} := \Phi(\hat{\mathbf{x}}) \in K$ den transportierten Punkt. Zeigen Sie, dass für $u \in C^1(K)$ die Beziehung

$$\nabla_{\mathbf{x}}\, u(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial \Phi(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right]^{-\mathsf{T}} \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\, \widehat{u}(\hat{\mathbf{x}}),$$

wobei $\widehat{u}(\hat{\mathbf{x}}) := u(\mathbf{x})$ ist, gilt.