Übungsblatt 3.

Abgabe bis: **Freitag, 11.10.2019, 12:00**

Aufgabe 1 (Robin-Randbedingungen | 4 Punkte)**.**

Betrachtet wird die Poissongleichung mit Robin-Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta u(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) + \kappa(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \end{aligned}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein glatt berandetes Gebiet und $\mathbf{n}$ die nach aussen gerichtete Normale sei.

(a) Stellen Sie die Variationsformulierung für dieses Randwertproblem auf.

(b) Seien $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma)$, sowie $\kappa \in L^\infty(\Gamma)$ und es gebe ein $\kappa_0 > 0$, so dass fast überall $\kappa(\mathbf{x}) \geq \kappa_0$ gilt. Zeigen Sie, dass das Robin-Randwertproblem unter diesen Voraussetzungen eine eindeutige Lösung besitzt. Verwenden Sie zum Beweis der Elliptizität der Bilinearform die Normäquivalenz aus Blatt 2 Aufgabe 3.

Aufgabe 2 (Lemma von Strang | 4 Punkte)**.**

Seien V ein Hilbert-Raum und $W \subset V$ ein abgeschlossener, linearer Unterraum und seien weiter $a \in B(V;V')$, $b \in B(W;W')$, $\ell \in V'$ und $m \in W'$, wobei a V-elliptisch ist mit der Konstante $c_a > 0$ und b W-elliptisch ist mit der Konstante $c_b > 0$. Schliesslich seien $u_0 \in V$ und $u_1, u_2, u_3 \in W$ die Lösungen der Variationsprobleme:

$$\begin{aligned} &\text{Suche } u_0 \in V, \text{ so dass} \quad a(u_0, v) = \ell(v) \quad \text{für alle } v \in V, \\ &\text{suche } u_1 \in W, \text{ so dass} \quad a(u_1, w) = \ell(w) \quad \text{für alle } w \in W, \\ &\text{suche } u_2 \in W, \text{ so dass} \quad a(u_2, w) = m(w) \quad \text{für alle } w \in W, \\ &\text{suche } u_3 \in W, \text{ so dass} \quad b(u_3, w) = m(w) \quad \text{für alle } w \in W. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\|u_2 - u_1\|_V \leq \frac{\|m - \ell\|_{W'}}{c_a}.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\|u_3 - u_2\|_V \leq \frac{\|a - b\|_{B(W;W')}}{c_b} \|u_2\|_V.$$

(c) Schliessen Sie, dass

$$\begin{aligned} \|u_3 - u_0\|_V \leq{} & \frac{\|a - b\|_{B(W;W')}}{c_b} \left(\frac{\|m - \ell\|_{W'}}{c_a} + \frac{\|a\|_{B(V;V')}}{c_a} \inf_{w \in W} \|u_0 - w\|_V + \|u_0\|_V \right) \\ & + \frac{\|m - \ell\|_{W'}}{c_a} + \frac{\|a\|_{B(V;V')}}{c_a} \inf_{w \in W} \|u_0 - w\|_V. \end{aligned}$$

Hinweis. *Seien X, Y Banach-Räume, dann bezeichnen wir mit $B(X;Y)$ den Banach-Raum aller stetigen, linearen Operatoren von X nach Y mit der (kanonischen Norm)*

$$\|F\|_{B(X;Y)} := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|F(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Insbesondere ist $X' = B(X;\mathbb{R})$.

Aufgabe 3 (Bi-Laplace-Gleichung | 4 Punkte)**.**

Vorgelegt sei die biharmonische Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta^2 u = f \qquad & \text{in } \Omega, \\ u = g,\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = h \quad & \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes, offenes Gebiet und $\Delta^2 u := \Delta(\Delta u)$ sei. Sei $f \in C(\Omega)$. Zeigen Sie, dass eine glatte Funktion $u \in C^4(\overline{\Omega})$ genau dann Lösung dieser Gleichung ist, wenn sie die beiden Randbedingungen und die folgende schwache Formulierung erfüllt:

$$\int_\Omega \Delta u \Delta \varphi \,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega f \varphi \,\mathrm{d}\mathbf{x} \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Aufgabe 4 (Koordinaten-Transformation | 4 Punkte)**.**

Es seien $K, \widehat{K} \subset \mathbb{R}^2$ beschränkte, offene Mengen und $\Phi\colon \widehat{K} \to K$ ein Diffeomorphismus. Für $\widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{K}$ bezeichne $\mathbf{x} := \Phi(\widehat{\mathbf{x}}) \in K$ den transportierten Punkt. Zeigen Sie, dass für $u \in C^1(K)$ die Beziehung

$$\nabla_{\mathbf{x}}\, u(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial \Phi(\widehat{\mathbf{x}})}{\partial \widehat{\mathbf{x}}}\right]^{-\mathsf{T}} \nabla_{\widehat{\mathbf{x}}}\, \widehat{u}(\widehat{\mathbf{x}}),$$

wobei $\widehat{u}(\widehat{\mathbf{x}}) := u(\mathbf{x})$ ist, gilt.