Übungsblatt 2.

Abgabe bis: **Freitag, 07.10.2022, 12:00**

Aufgabe 1 (Variationsrechnung im Endlichdimensionalen | 4 Punkte).

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix.

(a) Für $\mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sei $\mathbf{y}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{b}$ für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Folgern Sie, dass $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gilt.

(b) Wir definieren das Funktional

$$J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \longmapsto J(\mathbf{v}) := \tfrac{1}{2}\mathbf{v}^\top \mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{b}^\top \mathbf{v}.$$

Ein Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ heisst *stationär*, falls

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} J(\mathbf{x} + t\mathbf{v})\Big|_{t=0} = 0$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt. Zeigen Sie, dass die stationären Punkte von J die Gleichung $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ erfüllen.

(c) Beweisen Sie, dass es genau einen stationären Punkt von J gibt, der gleichzeitig absolutes Minimum ist.

Aufgabe 2 (Spuroperator | 4 Punkte).

Seien

$$\Omega^- = (-1, 0) \times (-1, 1), \qquad \Omega^+ = (0, 1) \times (-1, 1)$$

und $u : (-1, 1)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $u|_{\Omega^\pm} \in H^1(\Omega^\pm)$ gegeben. Seien $\gamma^\pm$ die Spuroperatoren auf $\Omega^\pm$. Beweisen Sie, dass gilt:

$$u \in H^1\big((-1, 1)^2\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma^+ u = \gamma^- u \quad \text{auf } \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-.$$

Hinweis. *Verwenden Sie den Gaußschen Integralsatz.*

Aufgabe 3 (Die Seminormen $|\cdot|_{H^1(\Omega)}, \ldots, |\cdot|_{H^{k-1}(\Omega)}$ | 4 Punkte).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand und $k \geq 1$. Sei $\mathcal{P}_k$ der Raum der Polynome von Grad k, d.h. es gilt: $v \in \mathcal{P}_k \Longleftrightarrow \partial^\alpha v = 0$ für alle $|\alpha| = k + 1$.

a) Zeigen Sie, dass $C > 0$ existiert, so dass für alle $u \in H^k(\Omega)$ gilt

$$\inf_{v \in \mathcal{P}_{k-1}} \|u - v\|_{H^k(\Omega)} \leq C|u|_{H^k(\Omega)}.$$

Hinweis. *Sei $\Pi : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{P}_{k-1}$ die $L^2(\Omega)$-Orthoprojektion. Zeigen Sie durch einen Widerspruchsbeweis: Es existiert $C > 0$, so dass für alle $u \in H^k(\Omega)$ gilt*

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} \leq C\Big[|u|_{H^k(\Omega)} + \|\Pi u\|_{L^2(\Omega)}\Big].$$

Ausserdem besitzt eine beschränkte Folge in $H^1(\Omega)$ eine konvergente Teilfolge in $L^2(\Omega)$.

b) Zeigen Sie nun, dass $C > 0$ existiert, so dass für alle $u \in H^k(\Omega)$ gilt

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} \leq C\Big[|u|_{H^k(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\Big].$$

Aufgabe 4 (Variationsformulierung | 4 Punkte).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet. Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u + \langle \mathbf{b}, \nabla u \rangle + cu &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ und $f \in L^2(\Omega)$.

a) Schreiben Sie die zugehörige Variationsformulierung

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega)$$

auf, wobei $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform und $\ell : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ ein lineares Funktional ist.

b) Zeigen Sie die Stetigkeit der Bilinearform auf $H^1(\Omega)$.

c) Zeigen Sie, dass die Bilinearform elliptisch auf $H_0^1(\Omega)$ ist, falls $\mathbf{b}$ konstante Länge 1 besitzt und $c = 1$ ist.