Übungsblatt 2.

Abgabe bis: **Freitag, 04.10.2019, 12:00**

Aufgabe 1 (Variationsrechnung im Endlichdimensionalen | 4 Punkte)**.**

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix.

(a) Für $\mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sei $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Folgern Sie, dass $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gilt.

(b) Wir definieren das Funktional

$$J\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \mapsto J(\mathbf{v}) := \tfrac{1}{2}\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{v}.$$

Ein Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ heisst *stationär*, falls

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} J(\mathbf{x} + t\mathbf{v})\big|_{t=0} = 0$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt. Zeigen Sie, dass die stationären Punkte von J die Gleichung $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ erfüllen.

(c) Beweisen Sie, dass es genau einen stationären Punkt von J gibt, der gleichzeitig absolutes Minimum ist.

Aufgabe 2 (Spuroperator | 4 Punkte)**.**

Seien

$$\Omega^- = (-1, 0) \times (-1, 1), \qquad \Omega^+ = (0, 1) \times (-1, 1)$$

und $u\colon (-1, 1)^2 \to \mathbb{R}$ mit $u|_{\Omega^\pm} \in H^1(\Omega^\pm)$ gegeben. Seien $\gamma^\pm$ die Spuroperatoren auf $\Omega^\pm$. Beweisen Sie, dass gilt:

$$u \in H^1\big((-1, 1)^2\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma^+ u = \gamma^- u \quad \text{auf } \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-.$$

Hinweis. *Verwenden Sie den Gaußschen Integralsatz.*

Aufgabe 3 (Äquivalenz von Normen | 4 Punkte)**.**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand und $\Gamma \subset \partial\Omega$ ein Teil des Randes, mit $\operatorname{meas}_{\partial\Omega}(\Gamma) > 0$. Gegeben sei die Norm

$$\|v\|_{H^1_\Gamma(\Omega)} := \sqrt{|v|^2_{H^1(\Omega)} + \|\gamma_\Gamma(v)\|^2_{L^2(\Gamma)}}.$$

Hierbei bezeichnet $\gamma_\Gamma\colon H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ den Spuroperator eingeschränkt auf Γ. Zeigen Sie die Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_{H^1_\Gamma(\Omega)}$ und $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ bezüglich $H^1(\Omega)$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Finden Sie eine Abschätzung $\|v\|_{H^1_\Gamma(\Omega)} \leq c\|v\|_{H^1(\Omega)}$ für eine positive Konstante c und jede Funktion $v \in H^1(\Omega)$.

(b) Beweisen Sie nun die umgekehrte Abschätzung per Widerspruch. Nehmen Sie hierzu an, dass keine entsprechende Abschätzung existiert. Dies bedeutet, es gibt eine Folge $\{v_k\}_k \subset H^1(\Omega)$ mit $\|v_k\|_{H^1(\Omega)} = 1$ für alle k und $\|v_k\|_{H^1_\Gamma(\Omega)} \to 0$ für $k \to \infty$. Führen Sie dies zum Widerspruch.

Hinweis. *Jede beschränkte Folge in $H^1(\Omega)$ besitzt eine konvergente Teilfolge in $L^2(\Omega)$ (dies ist ein Spezialfall des Rellichschen Auswahlsatzes). Ferner gilt für Funktionen $v \in H^1(\Omega)$ mit $\nabla v = \mathbf{0}$, dass $v = K \in \mathbb{R}$ fast überall.*

Schliessen Sie, dass die Seminorm $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ auf $H^1_\Gamma(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : \gamma_\Gamma(v) = 0\}$ äquivalent zur Norm $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ ist.

Aufgabe 4 (Variationsformulierung | 4 Punkte)**.**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet. Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u + \langle \mathbf{b}, \nabla u\rangle + cu &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ und $f \in L^2(\Omega)$.

a) Schreiben Sie die zugehörige Variationsformulierung

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \text{für alle } v \in H^1_0(\Omega)$$

auf, wobei $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform und $\ell : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional ist.

b) Zeigen Sie die Stetigkeit der Bilinearform auf $H^1(\Omega)$.

c) Zeigen Sie, dass die Bilinearform elliptisch auf $H^1_0(\Omega)$ ist, falls $\mathbf{b}$ konstante Länge 1 besitzt und $c = 1$ ist.