# Übungsblatt 12.

Abgabe bis: **Freitag, 13.12.2019, 12:00**

**Aufgabe 1** (Clément-Operator | 4 Punkte)**.**

Sei $\mathcal{T}$ eine nicht entartete Triangulierung und

$$\omega_T := \bigcup_{T'\in\mathcal{T}\,:\,T\cap T'\neq\emptyset} T'$$

die Vereinigung aller Elemente, deren Schnitt mit $T \in \mathcal{T}$ nichtleer ist. Konstruieren Sie zu einer gegebenen Funktion $v \in H^1(\Omega)$ gemäss Clément eine stückweise konstante Funktion $v_h \in \mathcal{S}_h^0(\mathcal{T}) := \big\{v \in L^2(\Omega) \,:\, v|_T \in \mathcal{P}_0 \text{ für alle } T \in \mathcal{T}\big\}$ mit

$$\|v - v_h\|_{L^2(T)} \leq c h_T \|v\|_{H^1(\omega_T)}.$$

**Aufgabe 2** (elementweise Abschätzungen I | 4 Punkte)**.**

Gegeben sei eine nicht entartete Triangulierung $\mathcal{T}$ von einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.
Für ein Dreieck $T \in \mathcal{T}$ sei die Blasenfunktion $\psi_T \in C(\Omega)$ definiert durch

$$\psi_T(\mathbf{x}) := \begin{cases} 27\lambda_1^T(\mathbf{x})\lambda_2^T(\mathbf{x})\lambda_3^T(\mathbf{x}), & \text{wenn } \mathbf{x} \in T,\\ 0, & \text{sonst,}\end{cases}$$

wobei $\lambda_1^T, \lambda_2^T, \lambda_3^T$ die zu dem Dreieck $T$ assoziierten baryzentrischen Koordinaten sind.
Ferner sei zu zwei Dreiecken $T_1, T_2$ mit gemeinsamer Kante $e = T_1 \cap T_2$ die Funktion $\psi_e \in C(\Omega)$ definiert durch

$$\psi_e(\mathbf{x}) := \begin{cases} 4\lambda_1^{T_1}(\mathbf{x})\lambda_2^{T_1}(\mathbf{x}), & \text{wenn } \mathbf{x} \in T_1,\\ 4\lambda_1^{T_2}(\mathbf{x})\lambda_2^{T_2}(\mathbf{x}), & \text{wenn } \mathbf{x} \in T_2 \setminus T_1,\\ 0, & \text{sonst,}\end{cases}$$

wobei $\lambda_1^{T_j}, \lambda_2^{T_j}, \lambda_3^{T_j}$ die zu dem Dreieck $T_j$ assoziierten baryzentrischen Koordinaten sind, wobei die Reihenfolge in den Koordinaten so gewählt ist, dass $\lambda_3^{T_j}\big|_e \equiv 0$ ist. Schliesslich sei $E\colon L^2(e) \to L^2(T_1 \cup T_2)$ definiert durch

$$\big(E(\sigma)\big)(\mathbf{x}) := \begin{cases} \sigma\Big(\lambda_1^{T_1}(\mathbf{x})\mathbf{p}_1^{T_1} + \big(\lambda_2^{T_1}(\mathbf{x}) + \lambda_3^{T_1}(\mathbf{x})\big)\mathbf{p}_2^{T_1}\Big), & \text{wenn } \mathbf{x} \in T_1,\\ \sigma\Big(\lambda_1^{T_2}(\mathbf{x})\mathbf{p}_1^{T_2} + \big(\lambda_2^{T_2}(\mathbf{x}) + \lambda_3^{T_2}(\mathbf{x})\big)\mathbf{p}_2^{T_2}\Big), & \text{wenn } \mathbf{x} \in T_2 \setminus T_1,\\ 0, & \text{sonst,}\end{cases}$$

wobei $\lambda_k^{T_j}(\mathbf{p}_k^{T_j}) = 1$ gilt, i.e. $\mathbf{p}_k^{T_j}$ ist der zu $\lambda_k^{T_j}$ assoziierte Eckpunkt von $T_j$.
Zeigen Sie die folgenden Abschätzungen für ein beliebiges Dreieck $T \in \mathcal{T}$, eine Kante $e$ von $T$ und nur vom Inkreisradius $\kappa$ abhängigen Konstanten $c$ und $C$:

$$\begin{aligned}
\|\psi_T v\|_{L^2(T)} &\leq \|v\|_{L^2(T)} && \text{für alle } v \in L^2(T),\\
\|\psi_T^{1/2} p\|_{L^2(T)} &\geq c\|p\|_{L^2(T)} && \text{für alle } p \in \mathcal{P}_2,\\
|\psi_T p|_{H^1(T)} &\leq c h_T^{-1}\|p\|_{L^2(T)} && \text{für alle } p \in \mathcal{P}_2,\\
\|\psi_e^{1/2}\sigma\|_{L^2(e)} &\geq c\|\sigma\|_{L^2(e)} && \text{für alle } \sigma \in \mathcal{P}_2,\\
c h_e^{1/2}\|\sigma\|_{L^2(e)} \leq \big\|\psi_e E(\sigma)\big\|_{L^2(T)} &\leq C h_e^{1/2}\|\sigma\|_{L^2(e)} && \text{für alle } \sigma \in \mathcal{P}_2,\\
\big|\psi_e E(\sigma)\big|_{H^1(T)} &\leq c h_T^{-1}\big\|\psi_e E(\sigma)\big\|_{L^2(T)} && \text{für alle } \sigma \in \mathcal{P}_2.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 3** (elementweise Abschätzungen II | 4 Punkte)**.**

Die meisten Aussagen der vorherigen Aufgabe betreffen quadratische Polynome. Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass sich diese Aussagen nicht auf allgemeine $L^2$-Funktionen übertragen lassen.

**Aufgabe 4** (Datenoszillation | 4 Punkte)**.**

Sei $\mathcal{T}$ eine nicht entartete Triangulierung des Polygongebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Für jedes Element $T \in \mathcal{T}$ ist die $L^2$-Projektion $Q_T u \in \mathcal{P}_0$ einer Funktion $u \in L^2(T)$ definiert via

$$(Q_T u, \mathbf{1})_{L^2(T)} = (u, \mathbf{1})_{L^2(T)}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $u \in L^2(\Omega)$ und $T \in \mathcal{T}$ gilt

$$\|u - Q_T u\|_{L^2(T)} \leq C\|u\|_{L^2(T)}$$

und für alle $u \in H^1(T)$ und $T \in \mathcal{T}$ gilt

$$\|u - Q_T u\|_{L^2(T)} \leq C h_T \|u\|_{H^1(T)}.$$

(b) Die Triangulierung sei sogar quasi-uniform. Was bedeutet dieses Resultat dann für die Datenoszillation

$$\operatorname{osc}(f, \mathcal{T}) := \sqrt{\sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^2 \|f - Q_T f\|_{L^2(T)}^2}$$

falls $f \in L^2(\Omega)$ oder $f \in H^1(\Omega)$ ist?