Übungsblatt 12.

Abgabe bis: **Freitag, 19.12.2022, 12:00**

Aufgabe 1 (Elementweise Abschätzungen II | 4 Punkte).

Die meisten Aussagen aus Aufgabe 4 auf Blatt 11 betreffen quadratische Polynome. Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass sich diese Aussagen nicht auf allgemeine L^2-Funktionen übertragen lassen.

Aufgabe 2 (Clément-Operator | 4 Punkte).

Sei $\mathcal{T}$ eine nicht entartete Triangulierung und

$$\omega_T := \bigcup_{T' \in \mathcal{T}\,:\, T \cap T' \neq \emptyset} T'$$

die Vereinigung aller Elemente, deren Schnitt mit $T \in \mathcal{T}$ nichtleer ist. Konstruieren Sie zu einer gegebenen Funktion $v \in H^1(\Omega)$ gemäss Clément eine stückweise konstante Funktion $v_h \in \mathcal{S}_h^0(\mathcal{T}) := \big\{ v \in L^2(\Omega) \;:\; v|_T \in \mathcal{P}_0 \text{ für alle } T \in \mathcal{T} \big\}$ mit

$$\|v - v_h\|_{L^2(T)} \leq c h_T \|v\|_{H^1(\omega_T)}.$$

Aufgabe 3 (Semidiskrete Stabilität | 4 Punkte).

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $T \in \mathbb{R}_{>0}$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ und $a(w,v) := \int_\Omega \langle \nabla w, \nabla v \rangle \,\mathrm{d}x$ für $w, v \in H_0^1(\Omega)$, wobei $a(w,w) \geq \gamma \|w\|_{L^2(\Omega)}^2$ für $\gamma > 0$. Mit $f \in C\big((0,T); L^2(\Omega)\big)$ ist die folgende Variationsformulierung gegeben: Finde $u \in C^1\big((0,T); L^2(\Omega)\big) \cap C^0\big([0,T]; H_0^1(\Omega)\big)$, sodass

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(u(t), v\big)_{L^2(\Omega)} + a\big(u(t), v\big) = \big(f(t), v\big)_{L^2(\Omega)} \qquad \text{f.a. } v \in H_0^1(\Omega) \tag{1}$$

und $u(0) = u_0$.
Seien $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ ein endlichdimensionaler Unterraum und $u_{0,h} \in V_h$ die Projektion von u_0 auf V_h. Die Ortsdiskretisierung führt zu folgender Variationsformulierung: Finde $u_h \in C^1\big((0,T); V_h\big) \cap C^0\big([0,T]; V_h\big)$ mit $u_h(0) = u_{0,h}$, sodass (1) für alle $v \in V_h$ gilt.
Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\|u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\gamma t}\|u_{0,h}\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|f(s)\|_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s.$$

Aufgabe 4 (Datenoszillation | 4 Punkte).

Sei $\mathcal{T}$ eine nicht entartete Triangulierung des Polygongebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Für jedes Element $T \in \mathcal{T}$ ist die L^2-Projektion $Q_T u \in \mathcal{P}_0$ einer Funktion $u \in L^2(T)$ definiert via

$$(Q_T u, 1)_{L^2(T)} = (u, 1)_{L^2(T)}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $u \in L^2(\Omega)$ und $T \in \mathcal{T}$ gilt

$$\|u - Q_T u\|_{L^2(T)} \leq C\|u\|_{L^2(T)},$$

während für alle $u \in H^1(T)$ und $T \in \mathcal{T}$ gilt

$$\|u - Q_T u\|_{L^2(T)} \leq C h_T \|u\|_{H^1(T)}.$$

(b) Die Triangulierung sei sogar quasi-uniform. Was bedeutet dieses Resultat dann für die Datenoszillation

$$\operatorname{osc}(f,\mathcal{T}) := \sqrt{\sum_{T\in\mathcal{T}} h_T^2 \|f - Q_T f\|_{L^2(T)}^2},$$

falls $f \in L^2(\Omega)$ oder $f \in H^1(\Omega)$ ist?