Übungsblatt 11.

Abgabe bis: **Freitag, 09.12.2022, 12:00**

Aufgabe 1 (Konvergenz des CG-Verfahrens | 4 Punkte).

Für das CG-Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lässt sich zeigen, dass im k-ten Schritt der relative Fehler in der Energienorm wie folgt abgeschätzt werden kann:

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^\star\|_{\mathbf{A}} \le 2\left(\frac{\sqrt{\kappa(\mathbf{A})} - 1}{\sqrt{\kappa(\mathbf{A})} + 1}\right)^k \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^\star\|_{\mathbf{A}}.$$

Hierbei bezeichnet $\kappa(\mathbf{A}) = \operatorname{cond}_2(\mathbf{A})$ die spektrale Kondition der Matrix $\mathbf{A}$ und $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{A}} = \sqrt{\mathbf{v}^\intercal\mathbf{A}\mathbf{v}}$ die Energienorm.
Geben Sie in Abhängigkeit von h eine Abschätzung für die Anzahl der Iterationen an, die das CG-Verfahren zur Lösung benötigt, um eine feste Genauigkeit ε zu erreichen. Bestimmen Sie hierfür zunächst eine sinnvolle Approximation an den Kontraktionsfaktor des CG-Verfahrens.

Hinweis. *Eine frühere Aufgabe hat gezeigt, dass sich die Konditions $\kappa(\mathbf{A})$ proportional zu $\mathcal{O}(h^{-2})$ verhält.*

Aufgabe 2 (A-Posteriori-Glättung im Zweigitterverfahren | 4 Punkte).

Zeigen Sie analog zum Beweis der Konvergenz des Zweigitterverfahrens mit A-Priori-Glättung, dass für das Zweigitterverfahren ohne A-Priori-Glättungsschritte und mit L A-Posteriori-Glättungsschritten

$$|||\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{\text{neu}}|||_{2,j} \le \frac{c}{\sqrt{L}} |||\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{\text{alt}}|||_{2,j}$$

gilt.

Aufgabe 3 (Optimalität der geschachtelten Iteration | 4 Punkte).

Sei Ω ein konvexes Polygongebiet und $f \in L^2(\Omega)$. Wir betrachten den W-Zyklus mit K A-Priori-Glättungsschritten. Zeigen Sie, dass die Lösung $\widehat{\mathbf{u}}_j$ der geschachtelten Iteration mit R W-Zyklen auf jeder Gitterebene j der Fehlerabschätzung

$$|||\mathbf{u}_j - \widehat{\mathbf{u}}_j|||_{1,j} \le c h_j \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

genügt. Hierbei sei c unabhängig von j, vorausgesetzt R und K sind gross genug. Was für eine Abschätzung liefert diese Abschätzung für den Gesamtfehler $u - \widehat{u}_j$ in der $H^1(\Omega)$-Norm?

Aufgabe 4 (Elementweise Abschätzungen | 4 Punkte).

Gegeben sei eine nicht entartete Triangulierung $\mathcal{T}$ von einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.
Für ein Dreieck $T \in \mathcal{T}$ sei die Blasenfunktion $\psi_T \in C(\Omega)$ definiert durch

$$\psi_T(\mathbf{x}) := \begin{cases} 27\lambda_1^T(\mathbf{x})\lambda_2^T(\mathbf{x})\lambda_3^T(\mathbf{x}), & \text{wenn } \mathbf{x} \in T, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\lambda_1^T, \lambda_2^T, \lambda_3^T$ die zu dem Dreieck T assoziierten baryzentrischen Koordinaten sind.

Ferner sei zu zwei Dreiecken T_1, T_2 mit gemeinsamer Kante $e = T_1 \cap T_2$ die Funktion $\psi_e \in C(\Omega)$ definiert durch

$$\psi_e(\mathbf{x}) := \begin{cases} 4\lambda_1^{T_1}(\mathbf{x})\lambda_2^{T_1}(\mathbf{x}), & \text{wenn } \mathbf{x} \in T_1, \\ 4\lambda_1^{T_2}(\mathbf{x})\lambda_2^{T_2}(\mathbf{x}), & \text{wenn } \mathbf{x} \in T_2 \setminus T_1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\lambda_1^{T_j}, \lambda_2^{T_j}, \lambda_3^{T_j}$ die zu dem Dreieck T_j assoziierten baryzentrischen Koordinaten sind, wobei die Reihenfolge in den Koordinaten so gewählt ist, dass $\lambda_3^{T_j}\big|_e \equiv 0$ ist. Schliesslich sei $E: L^2(e) \longrightarrow L^2(T_1 \cup T_2)$ definiert durch

$$\big(E(\sigma)\big)(\mathbf{x}) := \begin{cases} \sigma\Big(\lambda_1^{T_1}(\mathbf{x})\mathbf{p}_1^{T_1} + \big(\lambda_2^{T_1}(\mathbf{x}) + \lambda_3^{T_1}(\mathbf{x})\big)\mathbf{p}_2^{T_1}\Big), & \text{wenn } \mathbf{x} \in T_1, \\ \sigma\Big(\lambda_1^{T_2}(\mathbf{x})\mathbf{p}_1^{T_2} + \big(\lambda_2^{T_2}(\mathbf{x}) + \lambda_3^{T_2}(\mathbf{x})\big)\mathbf{p}_2^{T_2}\Big), & \text{wenn } \mathbf{x} \in T_2 \setminus T_1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\lambda_k^{T_j}(\mathbf{p}_k^{T_j}) = 1$ gilt, i.e. $\mathbf{p}_k^{T_j}$ ist der zu $\lambda_k^{T_j}$ assoziierte Eckpunkt von T_j.
Zeigen Sie die folgenden Abschätzungen für ein beliebiges Dreieck $T \in \mathcal{T}$, eine Kante e von T und nur vom Inkreisradius κ abhängigen Konstanten c und C:

$$\begin{aligned} \|\psi_T v\|_{L^2(T)} &\leq \|v\|_{L^2(T)} && \text{für alle } v \in L^2(T), \\ \|\psi_T^{1/2} p\|_{L^2(T)} &\geq c\|p\|_{L^2(T)} && \text{für alle } p \in \mathcal{P}_2, \\ |\psi_T p|_{H^1(T)} &\leq c h_T^{-1}\|p\|_{L^2(T)} && \text{für alle } p \in \mathcal{P}_2, \\ \|\psi_e^{1/2}\sigma\|_{L^2(e)} &\geq c\|\sigma\|_{L^2(e)} && \text{für alle } \sigma \in \mathcal{P}_2, \\ c h_e^{1/2}\|\sigma\|_{L^2(e)} \leq \big\|\psi_e E(\sigma)\big\|_{L^2(T)} &\leq C h_e^{1/2}\|\sigma\|_{L^2(e)} && \text{für alle } \sigma \in \mathcal{P}_2, \\ \big|\psi_e E(\sigma)\big|_{H^1(T)} &\leq c h_T^{-1}\big\|\psi_e E(\sigma)\big\|_{L^2(T)} && \text{für alle } \sigma \in \mathcal{P}_2. \end{aligned}$$