Übungsblatt 11.

Abgabe bis: **Freitag, 06.12.2019, 12:00**

Aufgabe 1 (L^2-Konvergenz von V-Zyklus und W-Zyklus | 4 Punkte)**.**

(a) Wir betrachten die Näherungslösung $\mathbf{u}_j^{(k)}$ des Finite-Element-Gleichungssystems $\mathbf{A}_j\mathbf{u}_j = \mathbf{f}_j$ nach k W-Zyklen auf Level j. Sei $u_j^{(k)} \in V_j$ die durch $\mathbf{u}_j^{(k)}$ gegebene Funktion und ρ der Kontraktionsfaktor des W-Zyklus. Zeigen Sie für einen fixen Startwert $\mathbf{u}_j^0$, dass

$$\|u - u_j^{(k)}\|_{H^1(\Omega)} \leq \mathcal{O}(h_j + \rho^k) \quad \text{und} \quad \|u - u_j^{(k)}\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{O}(h_j^2 + \rho^k).$$

(b) Zeigen Sie ein analoges Resultat für den symmetrischen V-Zyklus, welches von der Anzahl der A-Priori- und A-Posteriori-Glättungsschritte abhängt.

Aufgabe 2 (Konvergenz des CG-Verfahrens | 4 Punkte)**.**

Für das CG-Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lässt sich zeigen, dass im k-ten Schritt der relative Fehler in der Energienorm wie folgt abgeschätzt werden kann:

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^\star\|_{\mathbf{A}} \leq 2\left(\frac{\sqrt{\kappa(\mathbf{A})} - 1}{\sqrt{\kappa(\mathbf{A})} + 1}\right)^k \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^\star\|_{\mathbf{A}}.$$

Hierbei bezeichnet $\kappa(\mathbf{A}) = \operatorname{cond}_2(\mathbf{A})$ die spektrale Kondition der Matrix $\mathbf{A}$ und $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{A}} = \sqrt{\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v}}$ die Energienorm.
Geben Sie in Abhängigkeit von h eine Abschätzung für die Anzahl der Iterationen an, die das CG-Verfahren zur Lösung benötigt, um eine feste Genauigkeit ε zu erreichen. Bestimmen Sie hierfür zunächst eine sinnvolle Approximation an den Kontraktionsfaktor des CG-Verfahrens.

Hinweis. *Eine frühere Aufgabe hat gezeigt, dass sich die Konditions $\kappa(\mathbf{A})$ proportional zu $\mathcal{O}(h^{-2})$ verhält.*

Aufgabe 3 (A-Posteriori-Glättung im Zweigitterverfahren | 4 Punkte)**.**

Zeigen Sie analog zum Beweis der Konvergenz des Zweigitterverfahrens mit A-Priori-Glättung, dass für das Zweigitterverfahren ohne A-Priori-Glättungsschritte und mit L A-Posteriori-Glättungsschritten

$$|||\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{\text{neu}}|||_{2,j} \leq \frac{c}{\sqrt{L}} |||\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{\text{alt}}|||_{2,j}$$

gilt.

Aufgabe 4 (Optimalität der geschachtelten Iteration | 4 Punkte)**.**

Sei Ω ein konvexes Polygongebiet und $f \in L^2(\Omega)$. Wir betrachten den W-Zyklus mit K A-Priori-Glättungsschritten. Zeigen Sie, dass die Lösung $\widehat{\mathbf{u}}_j$ der geschachtelten Iteration mit R W-Zyklen auf jeder Gitterebene j der Fehlerabschätzung

$$|||\mathbf{u}_j - \widehat{\mathbf{u}}_j|||_{1,j} \leq ch_j \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

genügt. Hierbei sei c unabhängig von j, vorausgesetzt R und K sind gross genug. Was für eine Abschätzung liefert diese Abschätzung für den Gesamtfehler $\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{u}}_j$ in der $H^1(\Omega)$-Norm?