Übungsblatt 10.

Bearbeiten bis: **Montag, 2.12.2024, 12:00**

Aufgabe 1 (Galerkin-Projektionen | 4 Punkte). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet. Wir bezeichnen mit $P_j : H_0^1(\Omega) \to V_j$ die Galerkin-Projektion bezüglich der elliptischen und symmetrischen Bilinearform $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ auf den Finite-Element-Raum $V_j \subset H_0^1(\Omega)$. Zeigen Sie für $u, v \in H_0^1(\Omega)$ die folgenden Aussagen:

(a) $a(u, P_j v) = a(P_j u, P_j v) = a(P_j u, v)$,

(b) $a\big(u, (I - P_j)v\big) = a\big((I - P_j)u, (I - P_j)v\big) = a\big((I - P_j)u, v\big)$,

(c) $a(P_j u, P_j v) = a(u, v) - a\big((I - P_j)u, (I - P_j)v\big)$.

Aufgabe 2 (Zweigitterverfahren | 4 Punkte). Wir betrachten das Zweigitterverfahren zur Lösung der Poisson-Gleichung auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit einspringenden Ecken. Die Konvexitätsbedingung an das Gebiet ist also verletzt, so dass keine H^2-Regularität vorliegt. Bezeichnet V_j den Finite-Element-Raum der stückweise linearen Funktionen zur Schrittweite $h_j = 2^{-j}$, so lässt sich für $v_j \in V_j$ und die Galerkin-Projektion $v_{j-1} = P_{j-1} v_j$ zeigen, dass die zugehörigen Koeffizientenvektoren $\mathbf{v}_j$ bzw. $\mathbf{v}_{j-1}$ die Approximationseigenschaft

$$\big|\!\big|\!\big|\mathbf{v}_j - \mathbf{I}_{j-1}^{j}\mathbf{v}_{j-1}\big|\!\big|\!\big|_{\frac{1}{2},j} \leq c \big|\!\big|\!\big|\mathbf{v}_j - \mathbf{I}_{j-1}^{j}\mathbf{v}_{j-1}\big|\!\big|\!\big|_{1,j}$$

erfüllen.

Führen Sie mithilfe dieser Eigenschaft den Beweis des Zweigitterverfahrens aus. Zeigen Sie also, dass für das Zweigitterverfahren mit K A-priori-Glättungsschritten und ohne A-posteriori-Glättung gilt

$$\big|\!\big|\!\big|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{\text{neu}}\big|\!\big|\!\big|_{\frac{1}{2},j} \leq \frac{C}{\sqrt{K}} \big|\!\big|\!\big|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{\text{alt}}\big|\!\big|\!\big|_{1/2,j}.$$

Aufgabe 3 (V-Zyklus und W-Zyklus | 4 Punkte). Die zweidimensionale Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

soll auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0,1)^2$ mit dem Mehrgitterverfahren zur Schrittweite $h_j := 2^{-j}$ gelöst werden. Wie viele arithmetische Operationen werden benötigt, um einen V-Zyklus bzw. einen W-Zyklus mit jeweils drei Vor- und drei Nachglättungsschritten durchzuführen?

Als Glätter soll hierbei das Gauss-Seidel-Verfahren verwendet werden. Geben Sie die Anzahl der Operationen in Abhängigkeit von h_j an. Nehmen Sie hierfür an, dass die Systemmatrizen $\mathbf{A}_j$ dünnbesetzt sind, das heisst, es gibt jeweils nur $\mathcal{O}(1)$ nichttriviale Einträge pro Zeile oder Spalte. Zudem soll jeder Eintrag in $\mathbf{A}_j$ und in $\mathbf{f}_j$ jeweils mit konstantem Aufwand bestimmt werden können.

Aufgabe 4 (Konstruktion von Iterationsverfahren | 4 Punkte). Sei $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ eine Zerlegung der symmetrischen, positiv definiten Matrix $\mathbf{A}$. Zusätzlich sei auch $\mathbf{N}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass das Iterationsverfahren gegeben durch die Iterationsvorschrift

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_k)$$

wohldefiniert und konvergent ist. Zeigen Sie hierzu, dass $\mathbf{M}^{-1}$ existiert und dass die Eigenwerte der zugehörigen Iterationsmatrix alle im Intervall $(0,1)$ liegen.