



Übungsblatt 10.

Abgabe bis: Freitag, 02.12.2022, 12:00

Aufgabe 1 (Galerkin-Projektionen | 4 Punkte).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet. Wir bezeichnen mit $P_j : H_0^1(\Omega) \rightarrow V_j$ die Galerkin-Projektion bezüglich der elliptischen und symmetrischen Bilinearform $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ auf den Finite-Element-Raum $V_j \subset H_0^1(\Omega)$.

Zeigen Sie für $u, v \in H_0^1(\Omega)$ die folgenden Aussagen:

- (a) $a(u, P_j v) = a(P_j u, P_j v) = a(P_j u, v)$,
- (b) $a(u, (I - P_j)v) = a((I - P_j)u, (I - P_j)v) = a((I - P_j)u, v)$,
- (c) $a(P_j u, P_j v) = a(u, v) - a((I - P_j)u, (I - P_j)v)$.

Aufgabe 2 (Zweigiterverfahren | 4 Punkte).

Wir betrachten das Zweigiterverfahren zur Lösung der Poisson-Gleichung auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit einspringenden Ecken. Es ist also die Konvexitätsbedingung an das Gebiet verletzt, so dass keine H^2 -Regularität vorliegt.

Bezeichnet V_j den Finite-Element-Raum der stückweise linearen Funktionen zur Schrittweite $h_j = 2^{-j}$, so lässt sich für $v_j \in V_j$ und die Galerkin-Projektion $v_{j-1} = P_{j-1} v_j$ zeigen, dass die zugehörigen Koeffizientenvektoren \mathbf{v}_j bzw. \mathbf{v}_{j-1} die Approximationseigenschaft

$$\|\mathbf{v}_j - \mathbf{I}_{j-1}^j \mathbf{v}_{j-1}\|_{1/2,j} \leq c \|\mathbf{v}_j - \mathbf{I}_{j-1}^j \mathbf{v}_{j-1}\|_{1,j}$$

erfüllen.

Führen Sie mit Hilfe dieser Eigenschaft den Beweis des Zweigiterverfahrens aus. Zeigen Sie also, dass für das Zweigiterverfahren mit K A-priori-Glättungsschritten und ohne A-posteriori-Glättung gilt

$$\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{\text{neu}}\|_{1/2,j} \leq \frac{C}{\sqrt{K}} \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{\text{alt}}\|_{1/2,j}.$$

Aufgabe 3 (V-Zyklus und W-Zyklus | 4 Punkte).

Wir betrachten die zweidimensionale Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0, 1)^2$. Die Schrittweite sei gegeben als $h_j = 2^{-j}$.

Wir wollen diese Gleichung mit dem Mehrgitterverfahren lösen. Wie viele arithmetische Operationen werden benötigt, um einen V-Zyklus bzw. einen W-Zyklus mit jeweils drei Vor- und drei Nachglättungsschritten durchzuführen?

Als Glätter soll hierbei das Gauss-Seidel-Verfahren verwendet werden. Geben Sie die Anzahl der Operationen in Abhängigkeit von h_j an. Nehmen Sie hierfür an, dass die Systemmatrizen A_j dünnbesetzt sind, das heisst, es gibt jeweils nur $\mathcal{O}(1)$ nichttriviale Einträge pro Zeile oder Spalte. Zudem soll jeder Eintrag in A_j und in \mathbf{f}_j jeweils mit konstantem Aufwand bestimmt werden können.

Aufgabe 4 (L^2 -Konvergenz von V-Zyklus und W-Zyklus | 4 Punkte).

- (a) Wir betrachten die Näherungslösung $\mathbf{u}_j^{(k)}$ des Finite-Element-Gleichungssystems $\mathbf{A}_j \mathbf{u}_j = \mathbf{f}_j$ nach k W-Zyklen auf Level j . Sei $u_j^{(k)} \in V_j$ die durch $\mathbf{u}_j^{(k)}$ gegebene Funktion und ρ der Kontraktionsfaktor des W-Zyklus. Zeigen Sie für einen fixen Startwert \mathbf{u}_j^0 , dass

$$\|u - u_j^{(k)}\|_{H^1(\Omega)} \leq \mathcal{O}(h_j + \rho^k) \quad \text{und} \quad \|u - u_j^{(k)}\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{O}(h_j^2 + \rho^k).$$

- (b) Zeigen Sie ein analoges Resultat für den symmetrischen V-Zyklus, welches von der Anzahl der A-Priori- und A-Posteriori-Glättungsschritte abhängt.