Übungsblatt 1.

Abgabe bis: **Freitag, 30.09.2022, 12:00**

Aufgabe 1 (H^1-Funktionen | 4 Punkte).

(a) Sei $u \in C\big([a,b]\big)$ stückweise stetig differenzierbar, das heisst, es gibt eine Partition von $[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, so dass $u|_{[x_{i-1},x_i]} \in C^1\big([x_{i-1},x_i]\big)$ für $i = 1,\ldots,n$ ist. Beweisen Sie, dass $u \in H^1\big((a,b)\big)$.

(b) Zeigen Sie, dass auf der Einheitskreisscheibe $B_1(0) = \big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|\mathbf{x}\| < 1\big\}$ gilt:

$$u(r,\phi) = \log\left(\log\frac{2}{r}\right) \in H^1\big(B_1(0)\big).$$

(c) Seien $\Omega_1 = (-1,0) \times (0,1)$, $\Omega_2 = (0,1) \times (0,1)$ und $\Omega = (-1,1) \times (0,1)$. Sei $u \in C(\Omega)$ und gelte $u|_{\Omega_i} \in C^1(\Omega_i)$, $i \in \{1,2\}$. Zeigen Sie: $u \in H^1(\Omega)$. Ist die Funktion u noch in $H^1(\Omega)$ ohne der Forderung der Stetigkeit über die Kante $\{(0,y) | y \in (0,1)\}$?

Aufgabe 2 (Poincaré-Friedrichssche Ungleichung | 4 Punkte).

Sei $\square := (0,s)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass für alle $v \in H^1(\square)$ gilt

$$\|v\|^2_{L^2(\square)} \le s^2|\overline{v}|^2 + 2s^2|v|^2_{H^1(\square)}, \qquad \text{wobei } \overline{v} := \frac{1}{s^2}\int_\square v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Hinweis. *Man betrachte zuerst den Fall* $\overline{v} = 0$ *und verwende die Formel*

$$v(\mathbf{x}) = v(\mathbf{y}) + \int_{y_1}^{x_1} \partial_{x_1} v(t, y_2)\,\mathrm{d}t + \int_{y_2}^{x_2} \partial_{x_2} v(x_1, t)\,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 3 (Dichtheitsargumente | 4 Punkte).

Sei X ein normierter Vektorraum und $\tilde{X} \subset X$ ein dichter Teilraum. Sei Y ein Banachraum.

a) Sei $\tilde{L} : \tilde{X} \longrightarrow Y$ eine lineare Abbildung und es gebe ein $C > 0$, dass $\|\tilde{L}x\|_Y \le C\|x\|_X$ für alle $x \in X$ erfüllt. Zeigen Sie, dass sich dann $\tilde{L}$ in eindeutiger Weise zu einer stetigen linearen Abbildung L auf X fortsetzen lässt, d.h. $\tilde{L}x = Lx$ für alle $x \in \tilde{X}$ und $\|Lx\|_Y \le C\|x\|_X$ für alle $x \in X$.

b) Sei $\tilde{B} : \tilde{X} \times \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform und es gebe ein $C > 0$, dass $|\tilde{B}(u,v)| \le C\|u\|_X\|v\|_X$ für alle $u, v \in \tilde{X}$ erfüllt. Dann lässt sich $\tilde{B}$ eindeutig zu einer stetigen Bilinearform B auf $X \times X$ fortsetzen, d.h. $B : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ erfüllt: $B(u,v) = \tilde{B}(u,v)$ fur alle $u, v \in \tilde{X}$ und $|B(u,v)| \le C\|u\|_X\|v\|_X$ für alle $u, v \in X$.

Aufgabe 4 (Einbettung | 4 Punkte).

Ein Banach-Raum $X \subset Y$ ist stetig eingebettet in den Banach-Raum Y, falls gilt

$$\|a\|_Y \leq c\|a\|_X \quad \text{für alle } a \in X.$$

Diese Einbettung heisst kompakt, falls jede beschränkte Folge aus X eine in Y konvergente Teilfolge enthält.
Man zeige, dass der Raum ℓ^1 der absolut-summierbaren Folgen stetig in den Raum ℓ^2 der quadrat-summierbaren Folgen eingebettet ist. Ist diese Einbettung auch kompakt? Begründen Sie Ihre Antwort.