Übungsblatt 1.

Abgabe bis: **Freitag, 27.09.2019, 12:00**

Aufgabe 1 (Dimensionsabhängigkeit der Glattheit von H^1-Funktionen | 4 Punkte)**.**

(a) Sei $u \in C\big([a,b]\big)$ stückweise stetig differenzierbar, das heisst, es gibt eine Partition von $[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, so dass $u|_{[x_{i-1},x_i]} \in C^1\big([x_{i-1},x_i]\big)$ für $i = 1,\ldots,n$ ist. Beweisen Sie, dass $u \in H^1\big((a,b)\big)$.

(b) Zeigen Sie, dass auf der Einheitskreisscheibe $B_1(0) = \big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| < 1\big\}$ gilt:

$$u(r,\varphi) = \log\left(\log\frac{2}{r}\right) \in H^1\big(B_1(0)\big).$$

(c) Zeigen Sie, dass auf dem Einheitsball $B_1(0) = \big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| < 1\big\}$ für alle $\beta < 1/2$ gilt:

$$u(r,\varphi,\theta) = r^{-\beta} \in H^1\big((B_1(0)\big).$$

Aufgabe 2 (Poincaré-Friedrichssche Ungleichung | 4 Punkte)**.**

Sei $\Box := (0,s)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass für alle $v \in H^1(\Box)$ gilt

$$\|v\|_{L^2(\Box)}^2 \le s^2|\overline{v}|^2 + 2s^2|v|_{H^1(\Box)}^2, \qquad \text{wobei } \overline{v} := \frac{1}{s^2}\int_\Box v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Hinweis. *Man betrachte zuerst den Fall $\overline{v} = 0$ und verwende die Formel*

$$v(\mathbf{x}) = v(\mathbf{y}) + \int_{y_1}^{x_1} \partial_{x_1} v(t,y_2)\,\mathrm{d}t + \int_{y_2}^{x_2} \partial_{x_2} v(x_1,t)\,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 3 (Greensche Formeln | 4 Punkte)**.**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit hinreichend glattem Rand $\Gamma := \partial\Omega$, so dass der äussere Normalenvektor $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in \Gamma$ existiert. Leiten Sie aus dem Gaußschen Integralsatz

a) die erste Greensche Formel

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \operatorname{div}\big(\mathbf{A}(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})\big)v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\ = \int_\Omega \langle \mathbf{A}(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x}), \nabla v(\mathbf{x})\rangle\,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_\Gamma \langle \mathbf{A}(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x})\rangle v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\sigma \end{aligned}$$

b) und die zweite Greensche Formel

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \operatorname{div}\big(\mathbf{A}(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})\big)v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Gamma \langle \mathbf{A}(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x})\rangle v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\sigma \\ = -\int_\Omega \operatorname{div}\big(\mathbf{A}(\mathbf{x})\nabla v(\mathbf{x})\big)u(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Gamma \langle \mathbf{A}(\mathbf{x})\nabla v(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x})\rangle u(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\sigma \end{aligned}$$

her, wobei $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ symmetrisch sei.

Aufgabe 4 (Einbettung | 4 Punkte)**.**

Ein Banach-Raum $X \subset Y$ ist stetig eingebettet in den Banach-Raum Y, falls gilt

$$\|a\|_Y \leq c\|a\|_X \quad \text{für alle } a \in X.$$

Diese Einbettung heisst kompakt, falls jede beschränkte Folge aus X eine in Y konvergente Teilfolge enthält.
Man zeige, dass der Raum ℓ^1 der absolut-summierbaren Folgen stetig in den Raum ℓ^2 der quadrat-summierbaren Folgen eingebettet ist. Ist diese Einbettung auch kompakt? Begründen Sie Ihre Antwort.