Übungsblatt 0.

Abgabe bis: **Freitag, 20.09.2019, 12:00**

Aufgabe 1 (Charakterisierung von Differentialgleichungen | 4 Punkte).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Gebiet. Betrachten Sie den linearen Differentialoperator zweiter Ordnung, $\mathcal{L}\colon C^2(\Omega) \to C(\Omega)$, gegeben durch

$$(\mathcal{L}u)(\mathbf{x}) := -\sum_{i,j=1}^{2} a_{i,j}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{2} b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} u(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}).$$

Bestimmen Sie den Typ des Differentialoperators (elliptisch, parabolisch, hyperbolisch) mit den folgenden Konstanten, jeweils in Abhängigkeit des Parameters $y \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\big[a_{i,j}(\mathbf{x})\big]_{i,j=1}^2 := \begin{bmatrix} y & 1/y \\ 1/y & 1 \end{bmatrix}, \quad \big[b_i(\mathbf{x})\big]_{i=1}^2 := \begin{bmatrix} 0 \\ y^2 + \|\mathbf{x}\|_2^2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad c(\mathbf{x}) := 0.$$

Aufgabe 2 (Banach-Räume | 4 Punkte).

Sei $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall und $C^k(I)$ der Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen von I nach $\mathbb{R}$. Zeigen Sie für $k \in \mathbb{N}$, dass $C^k(I)$ bezüglich der Norm

$$\|f\| := \max_{\ell=0}^{k} \Big(\max_{x\in I} \big| f^{(\ell)}(x) \big| \Big)$$

ein Banach-Raum ist.

Aufgabe 3 (Fundamentallemma der Variationsrechnung | 4 Punkte).

Sei $d \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein offenes Gebiet.

(a) Gegeben seien zwei Funktionen $f, g \in C(\Omega)$. Zeigen Sie, dass aus

$$\int_V f(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_V g(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} \quad \text{für alle } V \subset \Omega \text{ offen und beschränkt}$$

$f = g$ folgt.

(b) Gegeben sei eine Funktion $f \in C(\Omega)$. Zeigen Sie, dass aus

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

$f = 0$ folgt. Hierbei beizeichnet $C_0^\infty(\Omega)$ den Raum der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen, welche nur auf einer kompakten Teilmenge von Ω von 0 verschiedene Werte annehmen.

Aufgabe 4 (schwache Ableitungen | 4 Punkte).

(a) Sei $u \in C^1\big([0, 1]\big)$. Zeigen Sie, dass dann schwache und klassische Ableitung von u übereinstimmen.

(b) Betrachten Sie die Funktion

$$f_\alpha(x) := \begin{cases} -x, & \text{falls } x \in (-1, 0], \\ x + \alpha, & \text{falls } x \in (0, 1). \end{cases}$$

Für welche Werte des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $f_\alpha \in H^1\big((-1, 1)\big)$?

Hinweis. *Sie dürfen folgende Aussage verwenden: Sei $x_0 \in (-1, 1)$. Es gibt kein $v(x) \in L^2\big((-1, 1)\big)$, sodass $\int_{-1}^{1} v(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}x = \varphi(x_0)$ gilt.*