Übungsblatt 0.

Abgabe bis: **Freitag, 23.09.2022, 12:00**

Aufgabe 1 (Charakterisierung von Differentialgleichungen | 4 Punkte).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Gebiet. Betrachten Sie den linearen Differentialoperator zweiter Ordnung, $\mathcal{L}: C^2(\Omega) \longrightarrow C(\Omega)$, gegeben durch

$$(\mathcal{L}u)(\mathbf{x}) := -\sum_{i,j=1}^{2} a_{i,j}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{2} b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} u(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}).$$

Bestimmen Sie den Typ des Differentialoperators (elliptisch, parabolisch, hyperbolisch) mit den folgenden Konstanten, jeweils in Abhängigkeit des Parameters $y \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\left[a_{i,j}(\mathbf{x})\right]_{i,j=1}^{2} := \begin{bmatrix} y & \sqrt{2(y-1)} \\ \sqrt{2(y-1)} & 1 \end{bmatrix}, \quad \left[b_i(\mathbf{x})\right]_{i=1}^{2} := \begin{bmatrix} y^2 \\ \|\mathbf{x}\|_2^2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad c(\mathbf{x}) := 0.$$

Aufgabe 2 (Banach-Räume | 4 Punkte).

Sei $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall und $C^k(I)$ der Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen von I nach $\mathbb{R}$. Zeigen Sie für $k \in \mathbb{N}$, dass $C^k(I)$ bezüglich der Norm

$$\|f\| := \max_{\ell=0}^{k} \left(\max_{x \in I} \left| f^{(\ell)}(x) \right| \right)$$

ein Banach-Raum ist.

Aufgabe 3 (Fundamentallemma der Variationsrechnung | 4 Punkte).

Sei $d \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein offenes Gebiet.

(a) Gegeben seien zwei Funktionen $f, g \in C(\Omega)$. Zeigen Sie, dass aus

$$\int_V f(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_V g(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} \quad \text{für alle } V \subset \Omega \text{ offen und beschränkt}$$

$f = g$ folgt.

(b) Gegeben sei eine Funktion $f \in C(\Omega)$. Zeigen Sie, dass aus

$$\int_\Omega f(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} = 0 \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

$f = 0$ folgt. Hierbei beizeichnet $C_0^\infty(\Omega)$ den Raum der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen, welche nur auf einer kompakten Teilmenge von Ω von 0 verschiedene Werte annehmen.

Aufgabe 4 (schwache Ableitungen | 4 Punkte).

(a) Sei $u \in C^1\big([0, 1]\big)$. Zeigen Sie, dass dann schwache und klassische Ableitung von u übereinstimmen.

(b) Sei $\Omega = (-1, 1)$ und $u(x) = |x|$ für $x \in \Omega$. Zeige, dass u die schwache Ableitung

$$u'(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } -1 < x < 0, \\ 1, & \text{falls } 0 \leq x < 1, \end{cases}$$

besitzt. Zeige nun, dass u' keine schwache Ableitung besitzt.