Übungsblatt 5.

Abgabe bis: **Montag, 19.10.2020, 12:00**

Aufgabe 1 (Schrittweitensteuerung bei Runge-Kutta-Verfahren | 4 Punkte)**.**

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f\left(\frac{2x}{\tau h_0}, y(x)\right), \quad y(0) = 0$$

mit einem $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welches $f(x, 0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{Z}$ erfüllt.
Bestimmen Sie die Iterierten η_i des Runge-Kutta-Verfahrens mit Schrittweitensteuerung. Wenn h_i in Algorithmus 2.17 nicht berechnet werden kann, sollen sie $h_i := \tau h_0$ mit dem h_0 aus den Eingaben setzen. Als Anfangsschrittweite sei hierbei h_0 vorgegeben und der Parameter τ stimme mit dem Parameter in f überein. Verwenden Sie das eingebettete Runge-Kutta-Verfahren mit dem Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
1/2 & 1/2 & & & & \\
1/2 & 0 & 1/2 & & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & & \\
1 & 1/6 & 3/6 & 3/6 & 1/6 & \\
\hline
p=3 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/6 \\
\hline
p=4 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 & 0
\end{array}$$

Scheinen Ihnen die so errechneten Werte η_i sinnvoll für jedes f, welches $f(x, 0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{Z}$ erfüllt?

Aufgabe 2 (Konsistenzordnung von Mehrschrittverfahren I | 4 Punkte)**.**

Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des folgenden Mehrschrittverfahrens

$$\frac{1}{60}(137\boldsymbol{\eta}_{i+5} - 300\boldsymbol{\eta}_{i+4} + 300\boldsymbol{\eta}_{i+3} - 200\boldsymbol{\eta}_{i+2} + 75\boldsymbol{\eta}_{i+1} - 12\boldsymbol{\eta}_i) = h\mathbf{f}(x_{i+5}, \boldsymbol{\eta}_{i+5}).$$

Aufgabe 3 (Kollokationsverfahren III | 4 Punkte)**.**

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y) \quad \text{mit} \quad y(a) = y_a$$

für $x \in [a, b]$. Sei weiter $h \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x_i := a + hi$. Startend von den k Anlaufwerten, $\eta_0 = y(x_0)$ und $\eta_i \approx y(x_i)$ für $i = 1, \ldots, k-1$, möchten wir per Kollokation ein explizites k-Schrittverfahren definieren. Dazu sei $p_i \in \Pi_k$ das Polynom vom Grad k, welches die $k+1$ Kollokationsbedingungen

$$p_i(x_{i+\ell}) = \eta_{i+\ell}, \quad \text{für } \ell = 0, \ldots, k-1, \text{ und} \quad p_i'(x_{i+k-1}) = f\big(x_{i+k-1}, \eta_{i+k-1}\big)$$

erfüllt. Dann sei das Verfahren für $i \geq 1$ durch $y(x_{i+k}) \approx \eta_{i+k} := p_i(x_{i+k})$ gegeben.
Betrachten Sie den Fall $k = 2$ und geben Sie das resultierende, lineare Mehrschrittverfahren an und überprüfen Sie dessen Konsistenzordnung.

Aufgabe 4 (Konsistenzordnung von Mehrschrittverfahren II | 4 Punkte)**.**

Beweisen Sie mithilfe von Satz 3.5, dass zu jedem $p \in \mathbb{N}$ lineare, explizite p-Schrittverfahren mit Konsistenzordnung p existieren.