Universität Basel

Prof. Dr. H. Harbrecht
M. Schmidlin

Numerik der Differentialgleichungen Herbstsemester 2020

Übungsblatt 3.

Abgabe bis: **Montag, 05.10.2020, 12:00**

Aufgabe 1 (Newton-Verfahren für Fixpunktgleichungen I | 4 Punkte)**.**

Sei $\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante $0 \leq q < 1$ und $\boldsymbol{\varphi}$ einmal stetig differenzierbar. Wir betrachten die zur Fixpunktgleichung

$$\mathbf{z} \overset{!}{=} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z})$$

äquivalente Gleichung

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) := \mathbf{z} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}) \overset{!}{=} \mathbf{0}.$$

(a) Beweisen Sie, dass für die Jacobi-Matrix von $\boldsymbol{\varphi}$ bei $\mathbf{z}$

$$\big\|\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{z})\mathbf{v}\big\| \leq q\|\mathbf{v}\|$$

für alle $\mathbf{v}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$ gilt. Schliessen Sie damit, dass für die Jacobi-Matrix von $\mathbf{g}$ bei $\mathbf{z}$

$$(1-q)\|\mathbf{v}\| \leq \big\|\mathbf{g}'(\mathbf{z})\mathbf{v}\big\| \leq (1+q)\|\mathbf{v}\|$$

für alle $\mathbf{v}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$ gilt, das heisst, sie ist invertierbar.

(b) Sei $\mathbf{z}^\star$ ein Fixpunkt von $\boldsymbol{\varphi}$. Zeigen Sie, dass

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{z}^\star\| \leq \frac{1}{1-q}\big\|\mathbf{z} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z})\big\|$$

und

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{z}^\star\| \leq \frac{1+q}{1-q}\Big\|\big[\mathbf{g}'(\mathbf{z})\big]^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{z})\Big\|$$

gelten.

Aufgabe 2 (Newton-Verfahren für Fixpunktgleichungen II | 4 Punkte)**.**

Wir betrachten zur Lösung von $\mathbf{g}(\mathbf{z}) \overset{!}{=} \mathbf{0}$ aus Aufgabe 1 die Newton-Iteration mit Schrittweiten a_k,

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k - a_k\big[\mathbf{g}'(\mathbf{z}_k)\big]^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{z}_k),$$

und möchten zeigen, dass bei geeigneter Wahl der jeweiligen Schrittweite das Residuum abnimmt, also dass $\big\|\mathbf{g}(\mathbf{z}_{k+1})\big\| < \big\|\mathbf{g}(\mathbf{z}_k)\big\|$ gilt.
Sei $0 < \sigma < 1$. Zeigen Sie, dass es ein $a_k \in \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ gibt, so dass

$$\big\|\mathbf{g}(\mathbf{z}_{k+1})\big\| \leq \big\|\mathbf{g}(\mathbf{z}_k)\big\|(1 - \sigma a_k)$$

gilt.

Hinweis. *Zeigen Sie zuerst, dass* $\mathbf{g}(\mathbf{z}_{k+1}) = \mathbf{g}(\mathbf{z}_k) - a_k\mathbf{g}(\mathbf{z}_k) + o(a_k)$ *gilt.*

Aufgabe 3 (Newton-Verfahren für implizite Runge-Kutta-Verfahren | 4 Punkte)**.**

Betrachten Sie das nichtlineare Gleichungssystem eines m-stufigen impliziten Runge-Kutta-Verfahren welches im i-ten Schritt gelöst werden muss:

$$\mathbf{k}_j^{(i)} = \mathbf{f}\left(x + h\alpha_j, \mathbf{y} + h\sum_{\ell=1}^{m} \beta_{j,\ell}\mathbf{k}_\ell^{(i)}\right), \quad j = 1, \dots, m.$$

(a) Um dieses System mit dem Newton-Verfahren zu lösen, definiert man die Funktion $\mathbf{g}$ durch

$$\mathbf{g}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{k}_1^{(i)} \\ \vdots \\ \mathbf{k}_m^{(i)}\end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix}\mathbf{k}_1^{(i)} - \mathbf{f}\left(x + h\alpha_1, \mathbf{y} + h\sum_{\ell=1}^{m} \beta_{1,\ell}\mathbf{k}_\ell^{(i)}\right) \\ \vdots \\ \mathbf{k}_m^{(i)} - \mathbf{f}\left(x + h\alpha_m, \mathbf{y} + h\sum_{\ell=1}^{m} \beta_{m,\ell}\mathbf{k}_\ell^{(i)}\right)\end{bmatrix}$$

und sucht deren Nullstelle.

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $\mathbf{g}$ (in Abhängigkeit von $\mathbf{f_y}$) und geben Sie die aus dem Newton-Verfahren resultierende Iterationsvorschrift an.

(b) Betrachten Sie ein diagonal implizites Runge-Kutta-Verfahren (DIRK), das heisst es gilt $\beta_{j,\ell} = 0$ für alle $\ell > j$. Zeigen Sie, dass es dann möglich ist das grosse nichtlineare Gleichungssystem durch sukzessives Lösen m kleinerer nichtlinearer Gleichungssysteme zu lösen. Wieso ist diese Tatsache bei Verwendung des Newton-Verfahrens vorteilhaft?

Aufgabe 4 (Konsistenz | 4 Punkte)**.**

Ein 3-stufiges Runge-Kutta-Verfahren sei gegeben durch das Butcher-Tableau:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & a_3 - b_{32} & b_{32} & 0 \\ \hline & c_1 & c_2 & c_3 \end{array}$$

Zeigen Sie, dass dieses Verfahren die Konsistenzordnung 3 hat, falls folgende, nichtlineare Gleichungen für die Parameter erfüllt sind

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1, \quad c_2a_2 + c_3a_3 = \frac{1}{2}, \quad c_2a_2^2 + c_3a_3^2 = \frac{1}{3}, \quad c_3b_{32}a_2 = \frac{1}{6}.$$

Finden Sie eine Lösung des Gleichungssystems und geben Sie die Inkrementfunktion des zugehörigen Verfahrens an.