Universität Basel

Prof. Dr. H. Harbrecht
M. Schmidlin

Numerik der Differentialgleichungen Herbstsemester 2020

Übungsblatt 1.

Abgabe bis: **Montag, 21.09.2020, 12:00**

Aufgabe 1 (analytische Lösung gewöhnlicher Diff'gleichungen | 4 Punkte)**.**

Gegeben sei die lineare Differentialgleichung

$$y' - \frac{1}{x^2+1}y = e^{\arctan(x)+2\log(x)}.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung durch *Trennung der Veränderlichen*.

(b) Verwenden Sie die Methode der *Variation der Konstanten* um die Lösung der inhomogenen Gleichung zu ermitteln für die $y(0) = 13$ gilt.

Hinweis. Trennung der Veränderlichen *beschreibt die folgenden, informellen Schritte zur Lösung des homogenen Anfangswertproblems* $y_h = f(x)g(y_h)$*:*

$$\frac{\mathrm{d}y_h}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y_h) \implies \frac{\mathrm{d}y_h}{g(y_h)} = f(x)\,\mathrm{d}x \implies \int \frac{\mathrm{d}y_h}{g(y_h)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Berechnen der Stammfunktionen und Auflösen nach y_h *ergibt eine Lösung der Differentialgleichung. Um anschliessend das nichthomogene Anfangswertproblem* $y' = a(x)y+b(x)$, $y(x_0) = y_0$ *mittels* Variation der Konstanten *zu lösen, macht man den Ansatz* $y_p(x) = c(x)y_h(x)$. *Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung liefert die Funktion* $c(x)$.

Aufgabe 2 (Transformation in ein System von Diff'gleichungen | 4 Punkte)**.**

Transformieren Sie die Differentialgleichung 3. Ordnung in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung und lösen Sie dieses:

$$y''' = 9y'' - 23y' + 15y, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 0.$$

Aufgabe 3 (Eindeutigkeit der Lösung von gewöhnlichen Diff'gleichungen | 4 Punkte)**.**

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt[43]{y^{41}}, \quad y(0) = 0$$

nicht eindeutig lösbar ist. Weisen Sie weiter nach, dass dies nicht im Widerspruch zum Satz von Picard-Lindelöf steht.

Aufgabe 4 (Lemma von Grönwall | 4 Punkte)**.**

Auf dem Streifen $S := \big\{(x,y) \,:\, x \in [a,b], y \in \mathbb{R}\big\}$ sei die Funktion $f\colon S \to \mathbb{R}$ stetig und genüge der Lipschitz-Bedingung

$$\big|f(x,y) - f(x,z)\big| \le L|y-z| \quad \text{für alle } (x,y),(x,z) \in S.$$

Für $x_0 \in [a,b]$ und $u \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit y_u die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = u.$$

Zeigen Sie anhand eines geeigneten Beispiels, dass die Abschätzung

$$\big|y_u(x) - y_v(x)\big| \le e^{L|x-x_0|}|u-v| \quad \text{für alle } x \in [a,b]$$

scharf ist.

Informationen zu den Übungen

Die Übung zu der Vorlesung *Numerik der Differentialgleichungen* besteht aus zwei parallel laufenden Teilen: den Übungsblättern und den Programmieraufgaben.

Übungsblätter

Die Übungsblätter, welche jeweils aus drei bis vier Aufgaben à je 4 Punkte bestehen, werden wie üblich im Wochenrhythmus ausgegeben und der Abgabe und Korrektur folgend in den Übungsstunden besprochen. Die Abgabe Ihrer Bearbeitung der Übungsblätter sowie der Rückgabe der Korrektur erfolgt dabei **elektronisch** über das Abgabesystem von ADAM, jeweils in Form **eines PDF**-Dokumentes.

Programmieraufgaben

Über die Vorlesungszeit verteilt werden drei Programmieraufgabenblätter ausgegeben, für deren Bearbeitung jeweils drei bis vier Wochen Zeit besteht. Ihre Bearbeitung der Programmieraufgaben wird dann jeweils in der vierten Woche in einer circa viertelstündiger Besprechung per Zoom mit Screensharing einem der Assistierenden vorgezeigt und besprochen. Unerfolgreich bearbeitete Aufgaben müssen auf die nächste Besprechung erfolgreich überarbeitet werden.

Die Einteilung in Gruppen und Zuweisung eines Assistierenden inklusive der Terminfindung für die Zoomabnahmen der Programmieraufgaben wird in den ersten Wochen stattfinden.