Übungsblatt 12.

Bearbeiten bis: **Montag, 11.12.2023, 12:00.**

Aufgabe 1 (Hölder-Ungleichung | 4 Punkte). Seien $p, q > 1$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) Indem Sie die Konkavität des Logarithmus verwenden, zeigen Sie

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

(b) Schliessen Sie, dass für jedes $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Aufgabe 2 (Optimierung einer quadratischen Funktion | 4 Punkte). Wir betrachten die Iteration

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k \, p_k$$

mit $x_0 = 2$ zur Minimierung von $f(x) = x^2$ und untersuchen das Verhalten der Folge $\{x_k\}$ für $k \to \infty$.

(a) Zeigen Sie für $p_k = (-1)^{k+1}$ und $\alpha_k = 2 + 3/2^{k+1}$, dass $x_k = (-1)^k + (-1/2)^k$ ist.

(b) Zeigen Sie für $p_k = -1$ und $\alpha_k = 1/2^{k+1}$, dass $x_k = 1 + 1/2^k$ ist.

Aufgabe 3 (Quasi-Newton-Verfahren | 4 Punkte).

(a) Verifizieren Sie die Quasi-Newton-Gleichung

$$\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{q}_k = \mathbf{p}_k.$$

Dabei ist $\mathbf{H}_k$ wie in der Vorlesung durch die Rekursion

$$\mathbf{H}_{k+1} := \Phi(\mathbf{H}_k, \mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k, \gamma_k, \nu_k)$$

gegeben.

(b) Zeigen Sie, dass sich für die Wahl $\gamma_k \equiv 1$ und $\nu_k \equiv 1$ die Rekursionsformel Φ für $\mathbf{H}_{k+1}$ vereinfacht zu

$$\Phi(\mathbf{H}_k, \mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k) = \mathbf{V}_k^\intercal \mathbf{H}_k \mathbf{V}_k + \rho_k \mathbf{p}_k \mathbf{p}_k^\intercal,$$

wobei $\mathbf{V}_k = \mathbf{I} - \rho_k \mathbf{q}_k \mathbf{p}_k^\intercal$ und $\rho_k = 1/(\mathbf{p}_k^\intercal \mathbf{q}_k)$ gilt.

Aufgabe 4 (Sherman-Morrison-Woodbury-Formel | 4 Punkte).

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathbf{v}^\intercal \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} = -1$, so ist $(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^\intercal)$ singulär.

(b) Ist $\mathbf{v}^\intercal \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \neq -1$, so gilt

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^\intercal)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{1}{1 + \mathbf{v}^\intercal \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^\intercal \mathbf{A}^{-1}.$$