Bonusblatt 12.

Abgabe bis: **Montag, 13.12.2021, 12:00.**

Die Aufgaben auf diesem Blatt geben Bonuspunkte für die Übungen.

Aufgabe 1 (Konvexe Funktionen | 4 Bonuspunkte).

Zeigen Sie:

(a) Minimiert man eine konvexe Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ auf einer konvexen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$, so ist die Menge der Lösungen leer oder konvex.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ mit einer symmetrischen und positiv semidefiniten Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einem Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ist konvex.

Aufgabe 2 (Newton-Verfahren | 4 Bonuspunkte).

(a) Führen Sie zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^2 - 4xy + 6x &= 2 \\ x^2 - y^2 + 3x &= 4 \end{aligned}$$

einen Schritt des Newton-Verfahrens mit dem Startvektor $(x_0, y_0) = (2, 4)$ durch.

(b) Es sei $a > 0$. Bestimmen Sie die Parameter p und q so, dass die nach der Vorschrift

$$x_{k+1} = \frac{x_k^3 + pax_k}{qx_k^2 + a}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$

erzeugte Folge $\{x_k\}$ lokal gegen $\sqrt{a}$ mit der Ordnung 3 konvergiert.

Aufgabe 3 (Newton-Verfahren II | 4 Bonuspunkte).

Gegeben sei ein Gleichungssystem

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \ \mathbf{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Weiter definieren wir $\mathbf{G}(\mathbf{x}) := \mathbf{S}\mathbf{F}(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Sei $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$ ein lineares Gleichungssystem mit einer nichtsingulären Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass für jeden Startwert $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ das gewöhnliche Newton-Verfahren die gesuchte Lösung $\mathbf{x}^\star$ von (1) nach nur einer Iteration liefert.

(b) Sei $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ nichtsingulär für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und sei $\mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0$. Anwendung des gewöhnlichen Newton-Verfahrens

- auf $\mathbf{F}$ liefere die Folge $\{\mathbf{x}_i\}$,
- auf $\mathbf{G}$ liefere die Folge $\{\bar{\mathbf{x}}_i\}$.

Zeigen Sie: $\forall i \in \mathbb{N} : \mathbf{x}_i = \bar{\mathbf{x}}_i$.

(c) Sei für $n = 2$

$$\mathbf{F}(x, y) := \begin{pmatrix} \exp(x^2 + y^2) - 3 \\ x + y - \sin(3(x + y)) \end{pmatrix}$$

Für welche (x, y) ist $\mathbf{F}'$ singulär?

(d) Sei

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \mathbf{B}\mathbf{x} - \mathbf{c} \\ f(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) \end{pmatrix} \begin{matrix} \}n-1 \\ \}1 \end{matrix} ,$$

$\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times n}$, $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ nichtsingulär für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Man entwerfe einen effizienten Algorithmus zur Berechnung der Nullstelle $\mathbf{x}^\star$ von $\mathbf{F}$.

Aufgabe 4 (Quasi-Newton-Verfahren | 4 Bonuspunkte).

(a) Verifizieren Sie die Quasi-Newton-Gleichung

$$\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{q}_k = \mathbf{p}_k.$$

Dabei ist $\mathbf{H}_k$ wie in der Vorlesung durch die Rekursion

$$\mathbf{H}_{k+1} := \Phi(\mathbf{H}_k, \mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k, \gamma_k, \nu_k)$$

gegeben.

(b) Zeigen Sie, dass sich für die Wahl $\gamma_k \equiv 1$ und $\nu_k \equiv 1$ die Rekursionsformel Φ für $\mathbf{H}_{k+1}$ vereinfacht zu

$$\Phi(\mathbf{H}_k, \mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k) = \mathbf{V}_k^\top \mathbf{H}_k \mathbf{V}_k + \rho_k \mathbf{p}_k \mathbf{p}_k^\top,$$

wobei $\mathbf{V}_k = \mathbf{I} - \rho_k \mathbf{q}_k \mathbf{p}_k^\top$ und $\rho_k = 1/(\mathbf{p}_k^\top \mathbf{q}_k)$ gilt.

Aufgabe 5 (Zusammenhang DFPF/BFGS-Verfahren | 4 Bonuspunkte).

Zeigen Sie, dass zwischen der Update-Funktion $\Phi^{DFP}(\mathbf{H}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) := \Phi(\mathbf{H}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, 1, 0)$ des DFP-Verfahrens und der Update-Funktion $\Phi^{BFGS}(\mathbf{H}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) := \Phi(\mathbf{H}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, 1, 1)$ dem BFGS-Verfahrens folgender Zusammenhang besteht:

$$\left[\Phi^{DFP}(\mathbf{H}_k, \mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k)\right]^{-1} = \Phi^{BFGS}(\mathbf{H}_k^{-1}, \mathbf{q}_k, \mathbf{p}_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Aufgabe 6 (Symmetrisches Rang-1-Verfahren | 4 Bonuspunkte).

Für eine reguläre, symmetrische Matrix $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbf{y}_k, \mathbf{s}_k \in \mathbb{R}^n$ mit $(\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k\mathbf{s}_k)^\top \mathbf{s}_k \neq \mathbf{0}$ sei die Matrix $\mathbf{B}_{k+1}$ durch die SR1-Formel

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k + \frac{(\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k\mathbf{s}_k)(\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k\mathbf{s}_k)^\top}{(\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k\mathbf{s}_k)^\top \mathbf{s}_k}$$

definiert. Nehmen Sie an, $\mathbf{B}_{k+1}$ ist invertierbar. Zeigen Sie für $\mathbf{H}_k := \mathbf{B}_k^{-1}$ und

$$\mathbf{H}_{k+1} := \mathbf{H}_k + \frac{(\mathbf{s}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{y}_k)(\mathbf{s}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{y}_k)^\top}{(\mathbf{s}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{y}_k)^\top \mathbf{y}_k}$$

die Identität $\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{B}_{k+1}^{-1}$. Nutzen Sie dabei die Sherman-Morrison-Formel: für eine reguläre Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ mit $1 + \mathbf{v}^\top \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \neq 0$ gilt

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^\top\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\top\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^\top\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}.$$