Übungsblatt 11.

Bearbeiten bis: **Montag, 04.12.2023, 12:00.**

Aufgabe 1 (Konvexe Funktionen | 4 Punkte). Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, das heisst, für je zwei Punkte $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ und für alle $\lambda \in [0,1]$ gelte

$$F\big(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}\big) \le \lambda F(\mathbf{x}) + (1-\lambda)F(\mathbf{y})$$

Zeigen Sie:

(a) Die folgenden Funktionen sind konvex

$$F(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|, \quad F(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + x_2^2, \quad F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^\top\mathbf{x} \text{ mit } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ spd.}$$

(b) Falls eine konvexe Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein lokales Minimum besitzt, so ist dies auch ein globales.

Aufgabe 2 (Optimierungsverfahren unter affiner Transformation | 4 Punkte). Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zudem existiere ein $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, so dass $\nabla^2 F(\mathbf{x})$ positiv definit ist. Sei ferner $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Die neue Iterierte $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x} + \mathbf{d}$ berechne sich wie folgt:

i. Wechsel des Koordinatensystems $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}) := \mathbf{M}\mathbf{y} + \mathbf{v}$.

ii. Gradientenschritt im „$\mathbf{y}$“-Koordinatensystem: $\mathbf{y}^+ = \mathbf{y} - \nabla_{\mathbf{y}} F\big(\mathbf{x}(\mathbf{y})\big)$.

iii. Rücktransformation auf „$\mathbf{x}$“-Koordinaten: $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x}(\mathbf{y}^+)$.

(a) Geben Sie eine Formel für $\mathbf{d}$ an, welche lediglich von $\mathbf{M}$ und $\nabla F(\mathbf{x})$ abhängt.

(b) Wie ist $\mathbf{M}$ zu wählen, damit sich bei $\mathbf{d}$ um einen Gradientenschritt für F im Punkt $\mathbf{x}$ handelt? Für welche $\mathbf{M}$ entspricht $\mathbf{d}$ einem Newton-Schritt im Punkt $\mathbf{x}$?

Aufgabe 3 (Trust-Region-Verfahren | 4 Punkte). Sei $F(\mathbf{x}) := \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^\top\mathbf{x}$ mit $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ und einer symmetrischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zu F und dem Trust-Region-Radius $\Delta > 0$ gehört das Trust-Region-Problem:

$$\min\{F(\mathbf{x}) \;:\; \|\mathbf{x}\|_2 \le \Delta\}.$$

Sei $\mathbf{x}^\star$ die zugehörige Optimallösung. Betrachten Sie die Bedingungen:

(i) $\lambda^\star \ge 0$, $\|\mathbf{x}^\star\|_2 \le \Delta$, $\lambda^\star(\Delta - \|\mathbf{x}^\star\|_2) = 0$,

(ii) $(\mathbf{A} + \lambda^\star\mathbf{I})\mathbf{x}^\star = -\mathbf{b}$,

(iii) $\mathbf{A} + \lambda^\star\mathbf{I}$ ist positiv semidefinit.

Zeigen Sie:

(a) Falls $\|\mathbf{x}^\star\|_2 < \Delta$ gilt, so erfüllen $\mathbf{x}^\star$ und $\lambda^\star = 0$ die Bedingungen (i)-(iii).

(b) Sei $\|\mathbf{x}^\star\|_2 = \Delta$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\mathbf{v} + \mathbf{x}^\star\|_2 \le \Delta$. Dann gilt $(\mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{x}^\star)^\top\mathbf{v} \ge 0$.

Aufgabe 4 (Schulz-Iteration | 4 Punkte). Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Betrachten Sie zu einer Startnäherung $\mathbf{B}_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\|\mathbf{I} - \mathbf{B}_0\mathbf{A}\| < 1$ die Iteration $\mathbf{B}_{j+1} = \mathbf{B}_j(2\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{B}_j)$. Dabei ist $\|\cdot\|$ eine submultiplikative Norm. Zeigen Sie, dass $\mathbf{B}_j$ quadratisch gegen $\mathbf{A}^{-1}$ konvergiert.