Übungsblatt 10.

Bearbeiten bis: **Montag, 27.11.2023, 12:00.**

Aufgabe 1 (Hebden-Verfahren | 4 Punkte).

(a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, streng monoton wachsend und konkav mit eindeutiger Nullstelle $x^\star \in I$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung für alle Startwerte $x_0 \in I$ mit $x_0 \le x^\star$ monoton gegen $x^\star$ konvergiert.

(b) Betrachten Sie die Gleichung

$$r(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^2}{(d_i + x)^2} = \rho \tag{1}$$

mit z_i und d_i positiv für alle $i = 1, \dots, n$ und $\rho > 0$. Ferner gelte $d_i > d_{i+1}$ für alle $i = 1, \dots, n-1$ und $r(0) > \rho$. Zur Lösung der Gleichung (??) mit dem Hebden-Verfahren wird das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung auf die umgeformte Gleichung

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{r(x)}} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} = 0$$

angewendet. Zeigen Sie, dass das Hebden-Verfahren für den Startwert $x_0 = 0$ konvergiert.

Aufgabe 2 (Levenberg-Marquardt-Verfahren I | 4 Punkte).

Seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \ge n$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ sowie $\lambda > 0$. Ferner sei $\mathbf{d}$ die Lösung von $\left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} + \lambda\mathbf{I}\right)\mathbf{d} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ und $\mathbf{g}$ die Lösung von $\left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} + \lambda\mathbf{I}\right)\mathbf{g} = \mathbf{d}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{d}$ und $\mathbf{g}$ die linearen Ausgleichsprobleme

$$\min_{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \sqrt{\lambda}\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{v} - \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\|_2 \quad \text{und} \quad \min_{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \sqrt{\lambda}\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{w} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{d}/\sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \right\|_2 \tag{2}$$

lösen.

(b) Sei die QR-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ bekannt. Beschreiben Sie ein Verfahren, welches die linearen Ausgleichsprobleme (??) mit Hilfe von $n(n+1)/2$ Givens-Rotationen löst.

Hinweis. *Nutzen Sie, dass ein lineares Ausgleichsproblem mit Hilfe der QR-Zerlegung gelöst werden kann.*

Aufgabe 3 (Levenberg-Marquardt-Verfahren II | 4 Punkte).

Bestimmen Sie für die Rosenbrock-Funktion

$$f(x_1, x_2) = 100 \cdot (x_2 - x_1^2)^2 + (x_1 - 1)^2$$

ausgehend von $x_0 = [0, -0.001]^\mathsf{T}$ die neue Suchrichtung $\mathbf{d}_0$ des Levenberg-Marquardt-Verfahrens zu den Trust-Region-Radien $\Delta_0 \in \{1, 0.5, 0.25\}$. Nutzen Sie den Wert $y = 0$ als Datenvektor.

Aufgabe 4 (Duales Problem | 4 Punkte).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und sei $D := \{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^N \subset \Omega \times \{1, 1\}^N$, linear trennbar in $\mathbb{R}^d$. Das duale Klassifizierungsproblem ist definiert als

$$\max_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^N \lambda_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \lambda_i \lambda_j y_i y_j \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle, \text{ so dass } \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i = 0 \text{ und } \lambda_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq N. \tag{3}$$

Sei $\boldsymbol{\lambda}^\star$ eine Lösung von (??). Weiter seien $\mathbf{w}^\star := \sum_{i=1}^N \lambda_i^\star y_i \mathbf{x}_i$ und $w_0^\star \in \mathbb{R}$ derart, dass $y_i(\langle \mathbf{w}^\star, \mathbf{x}_i \rangle - w_0^\star) = 1$ für ein i mit $\lambda_i^\star \neq 0$. Zeigen Sie, dass $(\mathbf{w}^\star, w_0^\star)$ den Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen für das primale Problem

$$\min_{(\mathbf{w}, w_0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d w_i^2, \text{ so dass } y_i(\mathbf{w}^\intercal \mathbf{x}_i - w_0) \geq 1, \quad i = 1, \dots, N.$$

genügt.