Übungsblatt 10.

Abgabe bis: **Montag, 29.11.2021, 12:00.**

Aufgabe 1 (Gauß-Newton-Verfahren | 4 Punkte).

Betrachten Sie die Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben via

$$F(x) = \begin{bmatrix} x+1 \\ \lambda x^2 + x - 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

sowie das nichtlineare Ausgleichsproblem

$$\phi(x) = \|F(x)\|_2^2 \longrightarrow \min. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\phi(x)$ für $\lambda < 1$ in $x^\star = 0$ ein lokales Minimum besitzt. Für $\lambda < 7/16$ ist $x^\star$ sogar das einzige lokale Minimum.

(b) Formulieren Sie das Gauß-Newton-Verfahren für das Problem (1). Weisen Sie nach, dass $x^\star = 0$ für $\lambda < -1$ ein abstossender Fixpunkt des Gauß-Newton-Verfahrens ist, d.h. es gibt ein $\delta > 0$, so dass $|x_{k+1} - 0| > |x_k - 0|$ für alle x_k mit $0 < |x_k - 0| < \delta$.

(c) Für $|\lambda| < 1$ ist das Gauß-Newton-Verfahren konvergent. Welche Konvergenzordnung liegt in diesem Fall vor?

Aufgabe 2 (Hebden-Verfahren | 4 Punkte).

(a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, streng monoton wachsend und konkav mit eindeutiger Nullstelle $x^\star \in I$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung für alle Startwerte $x_0 \in I$ mit $x_0 \leq x^\star$ monoton gegen $x^\star$ konvergiert.

(b) Betrachten Sie die Gleichung

$$r(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^2}{(d_i + x)^2} = \rho \tag{2}$$

mit z_i und d_i positiv für alle $i = 1, \ldots, n$ und $\rho > 0$. Ferner gelte $d_i > d_{i+1}$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$ und $r(0) > \rho$. Zur Lösung der Gleichung (2) mit dem Hebden-Verfahren wird das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung auf die umgeformte Gleichung

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{r(x)}} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} = 0$$

angewendet. Zeigen Sie, dass das Hebden-Verfahren für den Startwert $x_0 = 0$ konvergiert.

Aufgabe 3 (Levenberg-Marquardt-Verfahren I | 4 Punkte).

Seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ sowie $\lambda > 0$. Ferner sei $\mathbf{d}$ die Lösung von $\left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} + \lambda\mathbf{I}\right)\mathbf{d} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ und $\mathbf{g}$ die Lösung von $\left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} + \lambda\mathbf{I}\right)\mathbf{g} = \mathbf{d}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{d}$ und $\mathbf{g}$ die linearen Ausgleichsprobleme

$$\min_{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \sqrt{\lambda}\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{v} - \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\|_2 \quad \text{und} \quad \min_{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \sqrt{\lambda}\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{w} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{d}/\sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \right\|_2 \tag{3}$$

lösen.

(b) Sei die QR-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ bekannt. Beschreiben Sie ein Verfahren, welches die linearen Ausgleichsprobleme (3) mit Hilfe von $n(n+1)/2$ Givens-Rotationen löst.

Hinweis. *Nutzen Sie, dass ein lineares Ausgleichsproblem mit Hilfe der QR-Zerlegung gelöst werden kann.*

Aufgabe 4 (Levenberg-Marquardt-Verfahren II | 4 Punkte).

Bestimmen Sie für die Rosenbrock-Funktion

$$f(x_1, x_2) = 100 \cdot (x_2 - x_1^2)^2 + (x_1 - 1)^2$$

ausgehend von $x_0 = [0, -0.001]^\mathsf{T}$ die neue Suchrichtung $\mathbf{d}_0$ des Levenberg-Marquardt-Verfahrens zu den Trust-Region-Radien $\Delta_0 \in \{1, 0.5, 0.25\}$. Nutzen Sie den Wert $y = 0$ als Datenvektor.