Übungsblatt 9.

Bearbeiten bis: **Montag, 20.11.2023, 12:00.**

Aufgabe 1 (Fehlerabschätzungen beim CG-Verfahren | 4 Punkte).

Wir betrachten das CG-Verfahren zur Lösung von $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit einer symmetrischen, positiv definiten Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und der exakten Lösung $\mathbf{x}^\star$. Sei $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}^\star - \mathbf{x}_k$ der Fehler nach der k-ten Iteration. Zeigen Sie:

(a) Es gibt für alle $k \geq 0$ (vom Startwert $\mathbf{x}_0$ abhängige) Polynome p_k vom Grad $\leq k$ mit $p_k(1) = 1$, sodass für den Fehler

$$\mathbf{e}_k = p_k(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_0$$

gilt.

(b) Die CG-Iterierten erfüllen die Fehlerabschätzung

$$\|\mathbf{e}_k\|_{\mathbf{A}} \leq \max\{|p_k(1-\lambda)| : \lambda \in \sigma(\mathbf{A})\} \cdot \|\mathbf{e}_0\|_{\mathbf{A}},$$

wobei $\sigma(\mathbf{A})$ die Menge der Eigenwerte von $\mathbf{A}$ bezeichnet.

(c) Sei $\mathbf{r}_k = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_k$. Es gilt $\|\mathbf{r}_k\|_2 = \|\mathbf{e}\|_{\mathbf{A}^2}$.

Aufgabe 2 (Gradientenverfahren | 4 Punkte).

Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch die Summe zweier Sinusschwingungen, nämlich

$$g(t) = \sin(t + \phi) + \sin(2t + \psi).$$

Die Parameter ϕ, ψ seien zu bestimmen. Hierzu werden für $t_1 < t_2 < t_3$ die Werte $g_1 = g(t_1)$, $g_2 = g(t_2)$ und $g_3 = g(t_3)$ angenommen.

(a) Stellen Sie das entsprechende, nichtlineare Ausgleichsproblem zur Bestimmung von ϕ und ψ auf.

(b) Führen Sie die ersten beiden Schritte des Gradientenverfahrens für die Datenpunkte

i	1	2	3
t_i	0	$\pi/2$	π
g_i	1	1	-1

und Startnäherungen $\phi_0 = \psi_0 = 0$ aus.

Aufgabe 3 (Gauß-Newton-Verfahren | 4 Punkte).

Betrachten Sie die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben via

$$F(x) = \begin{bmatrix} x+1 \\ \lambda x^2 + x - 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

sowie das nichtlineare Ausgleichsproblem

$$\phi(x) = \|F(x)\|_2^2 \to \min. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\phi(x)$ für $\lambda < 1$ in $x^\star = 0$ ein lokales Minimum besitzt. Für $\lambda < 7/16$ ist $x^\star$ sogar das einzige lokale Minimum.

(b) Formulieren Sie das Gauß-Newton-Verfahren für das Problem (1). Weisen Sie nach, dass $x^\star = 0$ für $\lambda < -1$ ein abstossender Fixpunkt des Gauß-Newton-Verfahrens ist, d.h. es gibt ein $\delta > 0$, so dass $|x_{k+1} - 0| > |x_k - 0|$ für alle x_k mit $0 < |x_k - 0| < \delta$.

(c) Für $|\lambda| < 1$ ist das Gauß-Newton-Verfahren konvergent. Welche Konvergenzordnung liegt in diesem Fall vor?

Aufgabe 4 (Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen | 4 Punkte).

Betrachten Sie für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ das Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{x} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{D}^\mathsf{T}\mathbf{x} \geq \boldsymbol{\delta}.$$

Wir definieren die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ als

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) := \frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}^\mathsf{T}(\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}) - \boldsymbol{\lambda}^\mathsf{T}(\mathbf{D}^\mathsf{T}\mathbf{x} - \boldsymbol{\delta}).$$

Es seien nun

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}.$$

Zeigen Sie, dass das Tripel $(\mathbf{x}^\star, \mu^\star, \boldsymbol{\lambda}^\star)$, gegeben durch

$$\mathbf{x}^\star = \frac{1}{9}(1,1,0)^\mathsf{T}, \quad \mu^\star = -\frac{5}{9}, \quad \boldsymbol{\lambda}^\star = \frac{1}{9}(0,0,1)^\mathsf{T},$$

den Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen

$$\nabla_\mathbf{x}\mathcal{L}(\mathbf{x}^\star, \boldsymbol{\mu}^\star, \boldsymbol{\lambda}^\star) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{x}^\star = \boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{D}^\mathsf{T}\mathbf{x}^\star \geq \boldsymbol{\delta}, \quad \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}^\mathsf{T}(\mathbf{D}^\mathsf{T}\mathbf{x}^\star - \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{0}$$

genügt.