Übungsblatt 9.

Abgabe bis: **Montag, 22.11.2021, 12:00.**

Aufgabe 1 (Eigenschaften des CG-Verfahrens | 4 Punkte).

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_{\mathbf{A}} := \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}$. Zeigen Sie:

(a) $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{A}}$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

(b) Sei $\mathbf{x}^*$ die Lösung von $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ und $\|\cdot\|_{\mathbf{A}}$ die durch $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{A}}$ definierte Norm. Für $\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x})^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x})$ gilt $\|\mathbf{x}^*-\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}}^2 = 2\phi(\mathbf{x})$.

(c) Der Vektor $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ minimiert genau dann das Funktional $\phi(\mathbf{x})$, wenn er $F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$ minimiert.

(d) Die Familie von Vektoren $\{\mathbf{d}_1,\dots,\mathbf{d}_n\}\subset\mathbb{R}^n$ sei $\mathbf{A}$-konjugiert. Für beliebige $\gamma_k\in\mathbb{R}$, $k = 1,\dots,n$, gilt $F\left(\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\mathbf{d}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}F(\gamma_k\mathbf{d}_k)$.

(e) Interpretieren Sie das Resultat aus (d).

Aufgabe 2 (Fehlerabschätzungen beim CG-Verfahren | 4 Punkte).

Wir betrachten das CG-Verfahren zur Lösung von $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit einer symmetrischen, positiv definiten Matrix $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ und der exakten Lösung $\mathbf{x}^\star$. Sei $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}^\star - \mathbf{x}_k$ der Fehler nach der k-ten Iteration. Zeigen Sie:

(a) Es gibt für alle $k\geq 0$ (vom Startwert $\mathbf{x}_0$ abhängige) Polynome p_k vom Grad $\leq k$ mit $p_k(1) = 1$, sodass für den Fehler

$$\mathbf{e}_k = p_k(\mathbf{I}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{e}_0$$

gilt.

(b) Die CG-Iterierten erfüllen die Fehlerabschätzung

$$\|\mathbf{e}_k\|_{\mathbf{A}} \leq \max\{|p_k(1-\lambda)| : \lambda\in\sigma(\mathbf{A})\}\cdot\|\mathbf{e}_0\|_{\mathbf{A}},$$

wobei $\sigma(\mathbf{A})$ die Menge der Eigenwerte von $\mathbf{A}$ bezeichnet.

(c) Sei $\mathbf{r}_k = \mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}_k$. Es gilt $\|\mathbf{r}_k\|_2 = \|\mathbf{e}\|_{\mathbf{A}^2}$.

Aufgabe 3 (Gradientenverfahren | 4 Punkte).

Die Funktion $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ sei gegeben durch die Summe zweier Sinusschwingungen, nämlich

$$g(t) = \sin(t+\phi)+\sin(2t+\psi).$$

Die Parameter ϕ, ψ seien zu bestimmen. Hierzu werden für $t_1 < t_2 < t_3$ die Werte $g_1 = g(t_1)$, $g_2 = g(t_2)$ und $g_3 = g(t_3)$ angenommen.

(a) Stellen Sie das entsprechende, nichtlineare Ausgleichsproblem zur Bestimmung von ϕ und ψ auf.

(b) Führen Sie die ersten beiden Schritte des Gradientenverfahrens für die Datenpunkte

i	1	2	3
t_i	0	$\pi/2$	π
g_i	1	1	-1

und Startnäherungen $\phi_0 = \psi_0 = 0$ aus.