Übungsblatt 8.

Bearbeiten bis: **Montag, 13.11.2023, 12:00.**

Aufgabe 1 (Sensitivität des Ausgleichsproblems | 4 Punkte). Seien $m \geq n$, $\mathbf{A}$, $\Delta\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{b}$, $\Delta\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Es sei angenommen, dass A vollen Rang habe, d.h., minimale Singulärwert der Matrix $\mathbf{A}$ erfülle $\sigma_{\min}(\mathbf{A}) > 0$. Zusätzlich sei die Störung in der Systemmatrix klein und erfülle $\|\Delta\mathbf{A}\|_2 < \sigma_{\min}(\mathbf{A})$. Betrachten Sie nun die linearen Ausgleichsprobleme

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 \to \min \quad \text{und} \quad \|(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\tilde{\mathbf{x}} - (\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})\|_2 \to \min.$$

(a) Wir definieren $\tilde{\mathbf{A}} := \mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}$ und $\Delta\mathbf{x} := \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$. Zeigen Sie, dass

$$\Delta\mathbf{x} = (\tilde{\mathbf{A}}^\intercal\tilde{\mathbf{A}})^{-1}\Delta\mathbf{A}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) + (\tilde{\mathbf{A}}^\intercal\tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{A}}^\intercal(\Delta\mathbf{b} - \Delta\mathbf{A}\mathbf{x}).$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\|(\tilde{\mathbf{A}}^\intercal\tilde{\mathbf{A}})^{-1}\|_2 \leq (\sigma_{\min}(\mathbf{A}) - \|\Delta\mathbf{A}\|_2)^{-2}, \quad \|(\tilde{\mathbf{A}}^\intercal\tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\|_2 \leq (\sigma_{\min}(\mathbf{A}) - \|\Delta\mathbf{A}\|_2)^{-1}.$$

(c) Folgern Sie, dass

$$\|\Delta\mathbf{x}\|_2 \leq \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|_2 + \|\Delta\mathbf{A}\|_2\|\mathbf{x}\|_2}{\sigma_{\min}(\mathbf{A}) - \|\Delta\mathbf{A}\|_2} + \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|_2\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2}{(\sigma_{\min}(\mathbf{A}) - \|\Delta\mathbf{A}\|_2)^2},$$

Aufgabe 2 (Satz von Eckart-Young-Mirsky II | 4 Punkte). Sei eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Singulärwertzerlegung $(\{\sigma_i\}_{i=1}^r, \{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^m, \{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n)$ gegeben. Wir betrachten die Niedrigrangapproximation

$$\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\intercal, \quad 1 \leq k < r$$

von $\mathbf{A}$.

(a) Zeigen Sie

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_F^2 = \sum_{k+1}^{r} \sigma_i^2.$$

(b) Unter den Matrizen $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Rang höchstens gleich k ist $\mathbf{A}_k$ die beste Approximation von $\mathbf{A}$ bzgl. der $\|\cdot\|_F$-Norm:

$$\min_{\substack{\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{m\times n},\\ \operatorname{rang}(\mathbf{B})\leq k}} \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_F = \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_F.$$

Hinweis. *Nutzen Sie die Abschätzung* $\sigma_{\max}(\mathbf{V}+\mathbf{W}) \leq \sigma_{\max}(\mathbf{V}) + \sigma_{\max}(\mathbf{W})$ *aus der Aufgabe 3 (a) von Übungsblatt 7.*

Aufgabe 3 (CG-Verfahren | 4 Punkte). Verwenden Sie das CG-Verfahren, um die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

zu bestimmen. Wählen Sie $\mathbf{x}_0 = [1, 1, 1]^\mathsf{T}$ als Startvektor.

Aufgabe 4 (Invariante Unteräume | 4 Punkte). Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix, und $W \subset \mathbb{R}^n$ ein $\mathbf{A}$-invarianter Unterraum der Dimension k. Zeigen Sie: Falls W der kleinste $\mathbf{A}$-invariante Unterraum ist, sodass $\mathbf{r}_0 \in W$ gilt, dann bricht das CG-Verfahren nach höchstens k Iterationen mit der exakten Lösung ab.