Übungsblatt 8.

Abgabe bis: **Montag, 15.11.2021, 12:00.**

Aufgabe 1 (Satz von Eckart-Young-Mirsky II | 4 Punkte).

Sei eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Singulärwertzerlegung $(\{\sigma_i\}_{i=1}^r, \{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^m, \{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n)$ gegeben. Wir betrachten die Niedrigrangapproximation

$$\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T, \quad 1 \le k < r$$

von $\mathbf{A}$.

(a) Zeigen Sie

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_F^2 = \sum_{k+1}^r \sigma_i^2.$$

(b) Unter den Matrizen $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Rang höchstens gleich k ist $\mathbf{A}_k$ die beste Approximation von $\mathbf{A}$ bzgl. der $\|\cdot\|_F$-Norm:

$$\min_{\substack{\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{m\times n},\\ \text{rang}(\mathbf{B})\le k}} \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_F = \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_F.$$

Hinweis. *Nutzen Sie die Abschätzung* $\sigma_{\max}(\mathbf{V}+\mathbf{W}) \le \sigma_{\max}(\mathbf{V}) + \sigma_{\max}(\mathbf{W})$ *aus der Aufgabe 2 (a), Übungsblatt 7.*

Aufgabe 2 (Approximation mit orthogonalen Matrizen | 4 Punkte).

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$ und Singulärwerten $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.

(a) Zeigen Sie, dass für eine beliebige orthogonale Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Abschätzung

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{Q}\|_F^2 \ge \sum_{i=1}^n (\sigma_i - 1)^2 \tag{1}$$

gilt.

Hinweis. *Verwenden Sie* $\|\mathbf{A} - \mathbf{Q}\|_F = \text{Spur}\left((\mathbf{A}-\mathbf{Q})\left(\mathbf{A}^T - \mathbf{Q}^T\right)\right)$.

(b) Geben Sie eine orthogonale Matrix $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ an, für welche in (1) die Gleichheit angenommen wird, d.h.

$$\min\left\{\|\mathbf{A} - \mathbf{Q}\|_F^2 \;:\; \mathbf{Q} \text{ orthogonal}\right\} = \|\mathbf{A} - \mathbf{W}\|_F^2 = \sum_{i=1}^n (\sigma_i - 1)^2.$$

Aufgabe 3 (CG-Verfahren | 4 Punkte).

Verwenden Sie das CG-Verfahren, um die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

zu bestimmen. Wählen Sie $\mathbf{x}_0 = [1, 1, 1]^\mathsf{T}$ als Startvektor.

Aufgabe 4 (Invariante Unteräume | 4 Punkte).

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix, und $W \subset \mathbb{R}^n$ ein $\mathbf{A}$-invarianter Unterraum der Dimension k. Zeigen Sie: falls W der kleinste $\mathbf{A}$-invariante Unterraum ist, sodass $\mathbf{r}_0 \in W$ gilt, dann bricht das CG-Verfahren nach höchstens k Iterationen mit der exakten Lösung ab.