Übungsblatt 7.

Abgabe bis: **Montag, 08.11.2021, 12:00.**

Aufgabe 1 (Lineares Ausgleichsproblem | 4 Punkte).

Betrachten Sie die Matrix

$$\mathbf{A} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}.$$

(a) Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegung von $\mathbf{A}$.

(b) Berechnen Sie die Pseudoinverse $\mathbf{A}^+$ mit Hilfe der Singulärwertzerlegung sowie mittels der Gleichung $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$.

(c) Nutzen Sie $\mathbf{A}^+$, um das durch $\mathbf{A}$ und $\mathbf{b} = [1, 2, 3, 4]^{\mathsf{T}}$ definierte lineare Ausgleichsproblem zu lösen.

Aufgabe 2 (Abschätzungen der Singulärwerte | 4 Punkte).

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Beweisen Sie folgende Abschätzungen. Dabei bezeichnet $\sigma_{\max}$ den maximalen und $\sigma_{\min}$ den minimalen Singulärwert.

(a) Für eine Matrix $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt

$$\sigma_{\max}(\mathbf{A}+\mathbf{E}) \le \sigma_{\max}(\mathbf{A}) + \|\mathbf{E}\|_2,$$
$$\sigma_{\min}(\mathbf{A}+\mathbf{E}) \ge \sigma_{\min}(\mathbf{A}) - \|\mathbf{E}\|_2.$$

(b) Sei $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$, dann gilt

$$\sigma_{\max}([\,\mathbf{A}\,|\,\mathbf{z}\,]) \ge \sigma_{\max}(\mathbf{A}),$$
$$\sigma_{\min}([\,\mathbf{A}\,|\,\mathbf{z}\,]) \le \sigma_{\min}(\mathbf{A}),$$

wobei $[\,\mathbf{A}\,|\,\mathbf{z}\,] \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ durch Erweitern von $\mathbf{A}$ um die Spalte $\mathbf{z}$ entsteht.

Aufgabe 3 (Projektionen | 4 Punkte).

(a) Betrachten Sie einen Unterraum $W \subset \mathbb{R}^n$ und sein orthogonales Komplement $W^\perp$. Zeigen Sie, dass eine eindeutig bestimmte Matrix $\mathbf{P}_W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert mit $\mathbf{P}_W\mathbf{u} = \mathbf{u}$ für alle $\mathbf{u} \in W$ und $\mathbf{P}_W v = \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{v} \in W^\perp$.

(b) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Beweisen Sie, dass $\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{P}_{(\mathrm{kern}(\mathbf{A}))^\perp}$ und $\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{P}_{\mathrm{img}(\mathbf{A})}$.

Aufgabe 4 (Satz von Eckart-Young-Mirsky | 4 Punkte).

Sei eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Singulärwertzerlegung $(\{\sigma_i\}_{i=1}^r, \{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^m, \{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n)$ gegeben. Wir betrachten folgende Niedrigrangapproximation an $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T, \quad 1 \le k < r.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Es gilt $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_2 = \sigma_{k+1}$.

(b) Für jede Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\operatorname{rang}(\mathbf{B}) = k$ existiert ein Vektor $\mathbf{z} \in \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+1}\}$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, sodass $\mathbf{B}\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

(c) Unter den Matrizen $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Rang höchstens gleich k ist $\mathbf{A}_k$ die beste Approximation von $\mathbf{A}$ bzgl. der $\|\cdot\|_2$-Norm:

$$\min_{\substack{\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{m\times n},\\ \operatorname{rang}(\mathbf{B})\leq k}} \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_2 = \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_2.$$

Hinweis. *Schätzen Sie $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_2$ mit Hilfe von Teil (b) ab und vergleichen Sie die Abschätzung mit Teil (a).*