Übungsblatt 7.

Bearbeiten bis: **Montag, 06.11.2023, 12:00.**

Aufgabe 1 (Lineares Ausgleichsproblem | 4 Punkte).

Betrachten Sie die Matrix

$$\mathbf{A} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}.$$

(a) Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegung von $\mathbf{A}$.

(b) Berechnen Sie die Pseudoinverse $\mathbf{A}^+$ mit Hilfe der Singulärwertzerlegung sowie mittels der Gleichung $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$.

(c) Nutzen Sie $\mathbf{A}^+$, um das durch $\mathbf{A}$ und $\mathbf{b} = [1, 2, 3, 4]^{\mathsf{T}}$ definierte lineare Ausgleichsproblem zu lösen.

Aufgabe 2 (Bestimmung der Singulärwertzerlegung | 4 Punkte).

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Betrachten Sie eine Folge von Matrizen $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots$, wobei $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$ ist, und $\mathbf{A}_{k+1}$ aus $\mathbf{A}_k$ durch Anwendung einer orthogonalen Transformation hervorgeht. Ausserdem gilt für ein gerades k

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} a_{k,1} & b_{k,1} & & 0 \\ & a_{k,2} & \ddots & \\ & & \ddots & b_{k,n-1} \\ 0 & & & a_{k,n} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_{k+1} = \begin{bmatrix} a_{k+1,1} & & & 0 \\ b_{k+1,1} & \ddots & & \\ & \ddots & a_{k+1,n-1} & \\ 0 & & b_{k+1,n-1} & a_{k+1,n} \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie:

(a) Es existieren orthogonale Matrizen $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}\mathbf{Q}_2 = \tilde{\mathbf{A}}$, wobei $\tilde{\mathbf{A}}$ eine bidiagonale Matrix ist.

(b) Es gilt $\lim_{k\to\infty} b_{k,j} = 0$ für alle $j = 1, \ldots, n-1$.

(c) Es existiert ein $K \in \mathbb{N}$ derart, dass $a_{k,1} \geq a_{k,2} \geq \cdots \geq a_{k,n}$ für jedes $k > K$ gilt.

Aufgabe 3 (Abschätzungen der Singulärwerte | 4 Punkte).

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Beweisen Sie folgende Abschätzungen, wobei $\sigma_{\max}$ den maximalen und $\sigma_{\min}$ den minimalen Singulärwert bezeichne.

(a) Für eine Matrix $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}(\mathbf{A}+\mathbf{E}) &\leq \sigma_{\max}(\mathbf{A}) + \|\mathbf{E}\|_2, \\ \sigma_{\min}(\mathbf{A}+\mathbf{E}) &\geq \sigma_{\min}(\mathbf{A}) - \|\mathbf{E}\|_2. \end{aligned}$$

(b) Für $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ sei $[\,\mathbf{A}\,|\,\mathbf{z}\,] \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ die Matrix, die durch Erweitern von $\mathbf{A}$ um die Spalte $\mathbf{z}$ entsteht. Zeigen Sie

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}([\,\mathbf{A}\,|\,\mathbf{z}\,]) &\geq \sigma_{\max}(\mathbf{A}), \\ \sigma_{\min}([\,\mathbf{A}\,|\,\mathbf{z}\,]) &\leq \sigma_{\min}(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Satz von Eckart-Young-Mirsky | 4 Punkte).

Sei eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Singulärwertzerlegung $(\{\sigma_i\}_{i=1}^r, \{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^m, \{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n)$ gegeben. Wir betrachten folgende Niedrigrangapproximation an $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T, \quad 1 \leq k < r.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Es gilt $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_2 = \sigma_{k+1}$.

(b) Für jede Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\operatorname{rang}(\mathbf{B}) = k$ existiert ein Vektor $\mathbf{z} \in \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+1}\}$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, sodass $\mathbf{B}\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

(c) Unter den Matrizen $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Rang höchstens gleich k ist $\mathbf{A}_k$ die beste Approximation von $\mathbf{A}$ bzgl. der $\|\cdot\|_2$-Norm:

$$\min_{\substack{\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{m\times n},\\ \operatorname{rang}(\mathbf{B})\leq k}} \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_2 = \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_2.$$

Hinweis. *Schätzen Sie $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_2$ mit Hilfe von Teil (b) ab und vergleichen Sie die Abschätzung mit Teil (a).*