Übungsblatt 6.

Bearbeiten bis: **Montag, 30.10.2023, 12:00.**

Aufgabe 1 (Krylov-Räume | 4 Punkte). Zu $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ seien die Krylov-Räume $\mathcal{K}_k$ definiert als

$$\mathcal{K}_k(\mathbf{A}, \mathbf{v}) := \operatorname{span}\left\{\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{v}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{v}\right\}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

(a) Sei Π_m für $m \in \mathbb{N}$ der Raum aller reellen Polynome vom Grad $\leq m$. Zeigen Sie:

$$\mathcal{K}_k(\mathbf{A}, \mathbf{v}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = p(\mathbf{A})\mathbf{v} \text{ mit } p \in \Pi_{k-1}\}, \quad k \geq 1.$$

(b) Für $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ heisst

$$m = \min\{k \in \mathbb{N} : \text{es existiert } p \in \Pi_k \setminus \{0\} \text{ mit } p(\mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

der Grad von $\mathbf{v}$ bezüglich $\mathbf{A}$. Das zugehörige monische Polynom $p \in \Pi_m$, welches $p(\mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ erfüllt, wird *Minimalpolynom* von $\mathbf{v}$ bezüglich $\mathbf{A}$ genannt.

Sei $\ell \leq k$ der Grad des Minimalpolynoms von $\mathbf{v}$. Zeigen Sie:

$$\mathcal{K}_k(\mathbf{A}, \mathbf{v}) = \mathcal{K}_\ell(\mathbf{A}, \mathbf{v}) \quad \text{für alle } k \geq \ell$$

Aufgabe 2 (Tridiagonalmatrizen | 4 Punkte). Gegeben sei eine Tridiagonalmatrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & & 0 \\ \beta & \alpha & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma \\ 0 & & \beta & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \beta\gamma > 0.$$

Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von $\mathbf{D}$ gegeben sind durch

$$\lambda_k = \alpha + 2\sqrt{\beta\gamma}\,\operatorname{sign}(\beta)\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \qquad \text{für } k = 1, \dots, n.$$

Zeigen Sie ferner, dass für die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ die Darstellung

$$[\mathbf{v}_k]_i = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{i-1}{2}} \sin\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right), \qquad \text{für } i, k = 1, \dots, n$$

gilt, wobei $[\mathbf{v}_k]_i$ die i-te Komponente von $\mathbf{v}_k$ bezeichnet.

Aufgabe 3 (Lanczos-Verfahren | 4 Punkte). Betrachten Sie die Matrix

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 3 \\ -\sqrt{2} & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wenden Sie das Lanczos-Verfahren zu den Startwerten $\mathbf{z}_1 = [1, 0, 0]^\intercal$ und $\mathbf{z}_2 = \frac{1}{2}[\sqrt{2}, -1, 1]^\intercal$ auf die Matrix $\mathbf{A}$ an und begründen Sie sein Verhalten.

Aufgabe 4 (Glücksfall des Arnoldi-Prozesses | 4 Punkte). Betrachten Sie die Arnoldi-Iteration für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ beliebig. Zeigen Sie, dass im Falle $h_{m+1,m} = 0$, d.h. bei Abbruch der Arnoldi-Iteration im m-ten Schritt, $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{z} \in \mathcal{K}_m(\mathbf{A}, \mathbf{z})$ gilt.