Übungsblatt 6.

Abgabe bis: **Montag, 01.1.2021, 12:00.**

Aufgabe 1 (Krylov-Räume | 4 Punkte).

Zu $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ seien die zugehörigen Krylov-Räume definiert als

$$\mathcal{K}_k(\mathbf{A},\mathbf{v}) := \operatorname{span}\left\{\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{v}, \ldots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{v}\right\} \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots.$$

(a) Sei Π_m für $m \in \mathbb{N}$ der Raum alle reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich m. Zeigen Sie, dass für $k \geq 1$

$$\mathcal{K}_k(\mathbf{A},\mathbf{v}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = p(\mathbf{A})\mathbf{v} \text{ mit } p \in \Pi_{k-1}\}$$

gilt.

(b) Für $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ heisst

$$m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \text{es existiert } p \in \Pi_k \setminus \{0\} \text{ mit } p(\mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

der Grad von $\mathbf{v}$ bezüglich $\mathbf{A}$. Das zugehörige monische Polynom $p \in \Pi_m$, welches $p(\mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ erfüllt, wird *Minimalpolynom* von $\mathbf{v}$ bezüglich $\mathbf{A}$ genannt.

Sei $l \leq k$ der Grad des Minimalpolynoms von $\mathbf{v}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\mathcal{K}_k(\mathbf{A},\mathbf{v}) = \mathcal{K}_l(\mathbf{A},\mathbf{v}) \quad \text{für alle } k \geq l$$

gilt.

(c) Sei $\mathbf{A}$ nichtsingulär und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Bei einem Krylov-Raum-Verfahren suchen wir die Lösung $\mathbf{x}$ in den affinen Räumen

$$\mathbf{x}_0 + \mathcal{K}_k(\mathbf{A},\mathbf{r}), \quad i = 1, \ldots, n,$$

wobei $\mathbf{x}_0$ eine Startnäherung ist, und $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$ der zugehörige Residuum. Zeigen Sie: falls $\mathcal{K}_k(\mathbf{A},\mathbf{r}) = \mathcal{K}_{k+1}(\mathbf{A},\mathbf{r})$ für ein $k = 1, \ldots, n$, gilt, dann ist $\mathbf{x} \in \mathbf{x}_0 + \mathcal{K}_k(\mathbf{A},\mathbf{r})$.

Aufgabe 2 (Tridiagonalmatrizen | 4 Punkte).

Gegeben sei eine Tridiagonalmatrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & & 0 \\ \beta & \alpha & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma \\ 0 & & \beta & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \beta\gamma > 0.$$

Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von $\mathbf{D}$ gegeben sind durch

$$\lambda_k = \alpha + 2\sqrt{\beta\gamma}\operatorname{sign}(\beta)\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \qquad \text{für } k = 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie ferner, dass für die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ die Darstellung

$$[\mathbf{v}_k]_i = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{i-1}{2}} \sin\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right), \qquad \text{für } i, k = 1, \ldots, n$$

gilt, wobei $[\mathbf{v}_k]_i$ die i-te Komponente von $\mathbf{v}_k$ bezeichnet.

Aufgabe 3 (Lanczos-Verfahren | 4 Punkte).

Betrachten Sie die Matrix

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 3 \\ -\sqrt{2} & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wenden Sie das Lanczos-Verfahren zu den Startwerten $z_1 = (1, 0, 0)^T$ und $z_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}, -1, 1)^T$ auf die Matrix $\mathbf{A}$ an und begründen Sie sein Verhalten.