Übungsblatt 5.

Abgabe bis: **Montag, 25.10.2021, 12:00.**

Aufgabe 1 (Schursche Normalform II | 4 Punkte).

Beweisen Sie mithilfe der Schurschen Normalform den Spektralsatz: *Eine Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *ist normal genau dann, wenn eine unitäre Matrix* $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *existiert, so dass* $\mathbf{Q}^\star\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{D}$ *eine Diagonalmatrix ist.*

Hinweis. *Betrachten Sie die Schursche Normalform. Ist* $\mathbf{R}$ *auch normal? Ist* $\mathbf{D}$ *normal?*

Aufgabe 2 (Householder-Deflation | 4 Punkte).

Gegeben sei eine diagonalisierbare Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Mithilfe der Potenzmethode sei der betragsgrösste Eigenwert λ_1 und ein zugehöriger Eigenvektor $\mathbf{v}_1$ bestimmt worden.

(a) Bestimmen Sie einen Vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, so dass für die zugehörige Householder-Transformation $\mathbf{Q}_\mathbf{u}$ und ein $\sigma \neq 0$ die Beziehung

$$\mathbf{Q}_\mathbf{u}\mathbf{v}_1 = \sigma\mathbf{e}_1$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{A}$ durch

$$\mathbf{Q}_\mathbf{u}\mathbf{A}\mathbf{Q}_\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{b}^\intercal \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}$$

in eine Blockstruktur transformiert werden kann, wobei $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n-1}$ sind.

(c) Zeigen Sie, dass die Matrix $\mathbf{A}_1$ die Eigenwerte $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ besitzt.

Damit kann die Potenzmethode auf die kleinere Matrix $\mathbf{A}_1$ angewandt werden, um den nächsten Eigenwert λ_2 und einen zugehörigen Eigenvektor $\mathbf{v}_2$ zu bestimmen. Dieses als *Householder-Deflation* Verfahren kann danach sukzessive iteriert werden, um alle Eigenpaare der Matrix $\mathbf{A}$ zu bestimmen.

Aufgabe 3 (Lanczos-Verfahren | 4 Punkte).

Gegeben seien

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Konstruieren Sie mithilfe des Lanczos-Verfahrens eine Orthonormalbasis des Krylov-Raums

$$\mathcal{K}_3(\mathbf{A}, \mathbf{z}) = \operatorname{span}\{\mathbf{z}, \mathbf{A}\mathbf{z}, \mathbf{A}^2\mathbf{z}\}$$

und transformieren Sie damit die Matrix $\mathbf{A}$ auf Tridiagonalgestalt.

Aufgabe 4 (Orthonormalpolynome und Tridiagonalmatrizen | 4 Punkte).

Es sei $(p_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Orthonormalpolynome, definiert durch die Dreitermrekursion

$$\lambda p_n(\lambda) = \beta_n p_{n-1}(\lambda) + \alpha_{n+1} p_n(\lambda) + \beta_{n+1} p_{n+1}(\lambda), \qquad n \geq 0,$$

mit den Definitionen $p_{-1} = 0$, $p_0 = 1$ und $\beta_n > 0$. Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$ die Nullstellen von p_n genau den Eigenwerten der Tridiagonalmatrix

$$\mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0 & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}$$

entsprechen. Wie sehen die entsprechenden Eigenvektoren aus?