Universität Basel

Iterative Verfahren der Numerik
Prof. Dr. H. Harbrecht — HS 2021

Übungsblatt 4.

Abgabe bis: **Montag, 18.10.2021, 12:00.**

Aufgabe 1 (QR-Zerlegung | 4 Punkte).

Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie die Matrix $\mathbf{Q}$ explizit und verifizieren Sie, dass $\mathbf{QR} = \mathbf{A}$.

Hinweis. *Im Falle* $x_1 = 0$ *ist* $\frac{x_1}{|x_1|}$ *nicht definiert. Dieser Ausdruck lässt sich aber durch das* σ *aus Lemma 1.21 mit positivem Vorzeichen ersetzen.*

Aufgabe 2 (Eindeutigkeit der QR-Zerlegung | 4 Punkte).

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Zeigen Sie, dass die QR-Zerlegung von $\mathbf{A}$ eindeutig ist unter der zusätzlichen Annahme, dass $r_{j,j} > 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Hinweis. *Aus* $\mathbf{A} = \mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}_2\mathbf{R}_2$ *folgt, dass* $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2^{-1} = \mathbf{Q}_1^{\intercal}\mathbf{Q}_2 =: \mathbf{B}$ *ist. Zeigen Sie nun, dass* $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ *gilt.*

Aufgabe 3 (Schursche Normalform | 4 Punkte).

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion über n, dass eine unitäre Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert, so dass

$$\mathbf{Q}^\star\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{n-1} & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{R}.$$

Aufgabe 4 (Givens-Rotationen | 4 Punkte).

Zu gegebenen $1 \le i < j \le n$, $0 \le \theta < 2\pi$ definieren wir die Matrix

$$\mathbf{G}_{i,j,\theta} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & \cos\theta & & & & \sin\theta & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & -\sin\theta & & & & \cos\theta & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix $\mathbf{G}_{i,j\theta}$ eine Drehung der (i, j)-Ebene um den Winkel $-\theta$ bewirkt.

Hinweis. *Multiplizieren Sie dazu* $\mathbf{G}_{i,j,\theta}$ *mit einem Vektor* $\mathbf{v} = [* \dots *, \cos\phi, * \dots * \sin\phi, * \dots *]^\top$.

(b) Zeigen Sie, dass die sukzessive Multiplikation von Givens-Rotationen $\mathbf{G}_{i,j,\theta}$ mit $\mathbf{A}$ auf eine QR-Zerlegung führt.

(c) Ist dieses Verfahren aufwändiger als das Householder-Verfahren?