Übungsblatt 4.

Bearbeiten bis: **Montag, 16.10.2023, 12:00.**

Aufgabe 1 (QR-Zerlegung | 4 Punkte). Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 11 \\ -1 & 0 & 28 \\ -1 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie die Matrix $\mathbf{Q}$ explizit und verifizieren Sie, dass $\mathbf{QR} = \mathbf{A}$ gilt.

Aufgabe 2 (Givens-Rotationen | 4 Punkte). Zu gegebenen $1 \leq i < j \leq n$ und $0 \leq \theta < 2\pi$, definieren wir die Matrix

$$\mathbf{G}_{i,j}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & \cos\theta & & & \sin\theta & & \leftarrow i \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & -\sin\theta & & & \cos\theta & & \leftarrow j \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix $\mathbf{G}_{i,j}(\theta)$ eine Drehung der (i, j)-Ebene um den Winkel $-\theta$ bewirkt.

(b) Zeigen Sie, dass die sukzessive Multiplikation von Givens-Rotationen $\mathbf{G}_{i,j}(\theta)$ mit $\mathbf{A}$ auf eine QR-Zerlegung führt.

(c) Ist dieses Verfahren aufwändiger als das Householder-Verfahren?

Aufgabe 3 (Schursche Normalform | 4 Punkte). Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion über n, dass eine unitäre Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert, so dass

$$\mathbf{Q}^\star\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \star & \dots & \dots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{n-1} & \star \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{R}.$$

Aufgabe 4 (Potenzmethode II | 4 Punkte). Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass für jede diagonalisierbare Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$,

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{A}^k\|^{\frac{1}{k}} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\mathbf{A})\}.$$

Hinweis. *Die Norm $\|\cdot\|$ muss nicht notwendigerweise eine Operatornorm sein!*