Übungsblatt 3.

Bearbeiten bis: **Montag, 09.10.2023, 12:00.**

Aufgabe 1 (Householder-Matrix | 4 Punkte). Betrachten Sie für $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ die Householder-Matrix

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^\star}{\mathbf{v}^\star\mathbf{v}}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathbf{Q}$ ist hermitesch,

(b) $\mathbf{Q}$ ist unitär,

(c) $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{I}$,

und bestimmen Sie die Eigenwerte von $\mathbf{Q}$.

Aufgabe 2 (Zirkulante Shiftmatrix | 4 Punkte). Gegeben sei die zirkulante Shiftmatrix

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

(a) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von $\mathbf{S}$ die Beziehung $|\lambda| = 1$ erfüllen.

(b) Wenden Sie die Potenzmethode auf den Startvektor $\mathbf{z}_0 = \mathbf{e}_1$ an. Wie lautet die k-te Iterierte?

(c) Offensichtlich konvergieren die Vektoren nicht. Warum ist das kein Widerspruch zu Satz 1.14?

Aufgabe 3 (Eigenwertannäherungen | 4 Punkte). Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Hermitesche Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Weiter sei $\mu \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

(a) Zeigen Sie die Abschätzung

$$\min_{1\le j\le n} |\mu - \lambda_j| \le \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mu\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}.$$

Hinweis. *Benutzen Sie den Spektralsatz.*

(b) Folgern Sie, dass

$$\min_{1\le j\le n} |a_{k,k} - \lambda_j| \le \left(\sum_{j\neq k} |a_{j,k}|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad k = 1, \dots, n.$$

(c) Wenden Sie das Ergebnis aus (b) auf die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Welcher der Eigenwerte $\lambda_1 = 13$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 2$ wird durch die Diagonaleinträge approximiert?

Aufgabe 4 (Frobenius-Norm | 4 Punkte). Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Die *Frobenius-Norm* ist definiert als

$$\|\mathbf{A}\|_F := \left(\sum_{k,\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\|\mathbf{A}\|_F^2 = \mathrm{Spur}(\mathbf{A}^\star \mathbf{A})$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Spur}(\mathbf{AB}) = \mathrm{Spur}(\mathbf{BA})$ für alle $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt.

(c) Folgern Sie, dass $\|\mathbf{Q}^\star \mathbf{A} \mathbf{Q}\|_F = \|\mathbf{A}\|_F$ gilt für jede unitäre Matrix $\mathbf{Q}$.

(d) Zeigen Sie, dass $\|\mathbf{A}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_F$ gilt.

Hinweis. *Benutzen Sie die Identität* $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^\star \mathbf{A})}$.