Übungsblatt 3.

Abgabe bis: **Montag, 11.10.2021, 12:00.**

Aufgabe 1 (Zirkulante Shiftmatrix | 4 Punkte).

Gegeben sei die zirkulante Shiftmatrix

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

(a) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von $\mathbf{S}$ die Beziehung $|\lambda| = 1$ erfüllen.

(b) Wenden Sie die Potenzmethode auf den Startvektor $\mathbf{z}_0 = \mathbf{e}_1$ an. Wie lautet die k-te Iterierte?

(c) Offensichtlich konvergieren die Vektoren nicht. Warum ist das kein Widerspruch zu Satz 1.14?

Aufgabe 2 (Potenzmethode mit Shift | 4 Punkte).

Die Kovergenzrate der Potenzmethode lässt sich oft durch einen «Shift» verbessern, d.h., man iteriert mit der Matrix $\mathbf{A} - c\mathbf{I}$ statt $\mathbf{A}$, wobei $c \in \mathbb{R}$ geeignet gewählt ist.
Wir betrachten dazu eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \geq 0$.

(a) Angenommen, man erhält eine Näherungsfolge $(\mu_k)_k$ an den betragsgrössten Eigenwert von $\mathbf{A} - c\mathbf{I}$. Wie erhält man daraus einen Eigenwert von $\mathbf{A}$?

(b) Zeigen Sie, dass man mit dem Shift-Parameter $c = \frac{\lambda_2+\lambda_3}{2}$ den Eigenwert λ_1 von $\mathbf{A}$ annähern kann.

(c) Zeigen Sie, dass man mithilfe eines geeigneten Shifts, ohne die inverse Vektoriteration zu benutzen, auch den Eigenwert λ_3 von $\mathbf{A}$ bestimmen kann.

Aufgabe 3 (Eigenwertannäherungen | 4 Punkte).

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Hermitesche Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Weiter sei $\mu \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

(a) Zeigen Sie die Abschätzung

$$\min_{1\leq j\leq n} |\mu - \lambda_j| \leq \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mu\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}.$$

Hinweis. *Benutzen Sie den Spektralsatz.*

(b) Folgern Sie, dass

$$\min_{1\leq j\leq n} |a_{k,k} - \lambda_j| \leq \left(\sum_{j\neq k} |a_{j,k}|^2 \right)^{1/2}, \qquad k = 1, \dots, n.$$

(c) Wenden Sie das Ergebnis aus (b) auf die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Welcher der Eigenwerte $\lambda_1 = 13$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 2$ wird durch diese μ approximiert?

Aufgabe 4 (Householder-Matrix | 4 Punkte).

Betrachten Sie für $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ die Householder-Matrix

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^\star}{\mathbf{v}^\star\mathbf{v}}.$$

Zeigen Sie

(a) $\mathbf{Q}$ ist hermitesch,

(b) $\mathbf{Q}$ ist unitär,

(c) $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{I}$,

und bestimmen Sie die Eigenwerte von $\mathbf{Q}$.