Übungsblatt 2.

Abgabe bis: **Montag, 04.10.2021, 12:00.**

Aufgabe 1 (Rayleigh-Quotient | 4 Punkte).

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ die durch den Rayleight-Quotienten definierte Abbildung

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^\intercal \mathbf{A}\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2^2}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ genau dann, wenn $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor der Matrix $\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\intercal)$ zum Eigenwert $f(\mathbf{x})$ ist.

(b) Ist $\mathbf{A}$ symmetrisch mit den Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$, so gilt

$$\lambda_1 = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} f(\mathbf{x}), \qquad \lambda_n = \min_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} f(\mathbf{x}).$$

(c) Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ gilt

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - t\mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{A}\mathbf{x} - f(\mathbf{x})\mathbf{x}\|_2^2.$$

Aufgabe 2 (Potenzmethode | 4 Punkte). Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie die ersten fünf Iterierten $(\mathbf{z}_k)_k$ der Potenzmethode im Falle des Startvektors $\mathbf{z}_0 = [-1, 1, 3]^\intercal$ und $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. Berechnen Sie explizit auch den Fehler der Näherung $\mu_k = \mathbf{z}_k^\intercal \mathbf{A}\mathbf{z}_k$ an den betragsgrössten Eigenwert von $\mathbf{A}$.

Aufgabe 3 (Niedrigrangapproximation I | 4 Punkte). Das Ziel einer Niedrigrangapproximation ist die Annäherung einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch eine Matrix $\mathbf{A}_m \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei Rang $\mathbf{A}_m = m$ für ein $m \ll n$ und $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_m\| \leq \varepsilon$. Eine Möglichkeit hierzu im Fall symmetrischer und positiv definiter Matrizen ist die pivotisierte Cholesky-Zerlegung. Diese berechnet sich mit dem folgenden Algorithmus:

Input: Symmetrische und positiv definite $\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, Toleranz $\varepsilon > 0$.
Output: Niedrigrangapproximation $\mathbf{A}_m = \sum_{j=1}^m \boldsymbol{\ell}_j \boldsymbol{\ell}_j^\intercal$, so dass Spur$(\mathbf{A} - \mathbf{A}_m) \leq \varepsilon$.

setze $m := 1$
setze $\mathbf{d} := \operatorname{diag}(\mathbf{A})$ und $r := \|\mathbf{d}\|_1$
initialisiere $\boldsymbol{\pi} := (1, 2, \ldots, n)$
while $r > \varepsilon$ **do**
  setze $i := \arg\max\{d_{\pi_j} : j = m, m+1, \ldots, n\}$
  vertausche π_m und π_i
  setze $\ell_m^{\pi_m} := \sqrt{d_{\pi_m}}$
  for $m + 1 \leq k \leq n$ **do**
    berechne $\ell_m^{\pi_k} := \frac{1}{\ell_m^{\pi_m}} \left(a_{\pi_m,\pi_k} - \sum_{j=1}^{m-1} \ell_j^{\pi_m} \ell_j^{\pi_k} \right)$

setze $d_{\pi_k} := d_{\pi_k} - (\ell_m^{\pi_k})^2$
end for
berechne den Fehler $r := \sum_{j=m+1}^{n} d_{\pi_j}$
erhöhe $m := m + 1$
end while

Dabei bezeichnet ℓ_j^k die k-te Komponente des Vektors $\boldsymbol{\ell}_j$. Wenden Sie diesen Algorithmus mit ε = `1e-6` auf die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 12 & 7 & -8 & 2 & -3 \\ 7 & 7 & 2 & -3 & -3 \\ -8 & 2 & 22 & -8 & 2 \\ 2 & -3 & -8 & 12 & 7 \\ -3 & -3 & 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

an.

Hinweis. *Sie sollten genau drei Schritte benötigen.*

Aufgabe 4 (Niedrigrangapproximation II | 4 Punkte).

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische und positiv semi-definite Matrix, und $\mathbf{A}_m$ eine Niedrigrangapproximation

$$\mathbf{A}_m = \mathbf{L}\mathbf{L}^\intercal, \qquad \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die m von 0 verschiedenen Eigenwerte von $\mathbf{A}_m$ und ihre zugehörigen Eigenvektoren aus den Eigenwerten und Eigenvektoren von $\mathbf{L}^\intercal\mathbf{L}$ folgen.

(b) Angenommen, $\mathbf{A}$ sei positiv definit. Geben Sie mithilfe des Satzes von Bauer und Fike eine obere Schranke für den Approximationsfehler der Eigenwerte, abhängig von der Toleranz ε, an.

Hinweis. *Benutzen Sie, dass* $\operatorname{Spur}(\cdot)$ *auf der Menge der symmetrischen und positiv definiten Matrizen eine Norm definiert.*