# Übungsblatt 2.

Bearbeiten bis: **Montag, 02.10.2023, 12:00.**

**Aufgabe 1** (Eigenwerteinschliessung | 4 Punkte). Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Geben Sie mithilfe der Sätze von Gerschgorin (angewandt auf $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^\intercal$) und Bendixson eine möglichst kleine Menge an, welche das Spektrum von $\mathbf{A}$ enthält. Skizzieren Sie diese Mengen in der komplexen Ebene.

**Aufgabe 2** (Rayleigh-Quotient | 4 Punkte). Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die durch den Rayleight-Quotienten definierte Abbildung

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^\intercal \mathbf{A}\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2^2}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ genau dann, wenn $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor der Matrix $\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\intercal)$ zum Eigenwert $f(\mathbf{x})$ ist.

(b) Ist $\mathbf{A}$ symmetrisch mit den Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$, so gilt

$$\lambda_1 = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} f(\mathbf{x}), \qquad \lambda_n = \min_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} f(\mathbf{x}).$$

(c) Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ gilt

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - t\mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{A}\mathbf{x} - f(\mathbf{x})\mathbf{x}\|_2^2.$$

**Aufgabe 3** (Min-Max-Prinzip | 4 Punkte). Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hermitesch und $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ die Eigenwerte von $\mathbf{A}$. Für $1 \leq k \leq n$ definieren wir zudem $V_k := \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_k\}$, wobei $\mathbf{v}_j$ der zu $\lambda_j$ zugehörige Eigenvektor sei.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\lambda_{k+1} = \sup_{\substack{\mathbf{x}\neq\mathbf{0} \\ \mathbf{x}\perp V_k}} \frac{\mathbf{x}^\star \mathbf{A}\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2^2}, \qquad k = 1, \ldots, n-1.$$

(b) Sei $W \subset \mathbb{C}^n$ ein $k$-dimensionaler Unterraum. Zeigen Sie, dass $\dim(W^\perp \cap V_{k+1}) \geq 1$.

(c) Folgern Sie, dass

$$\lambda_{k+1} = \inf_{\substack{W\subset\mathbb{C}^n \\ \dim W\leq k}} \ \sup_{\substack{\mathbf{x}\neq\mathbf{0} \\ \mathbf{x}\perp W}} \frac{\mathbf{x}^\star \mathbf{A}\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2^2}.$$

**Aufgabe 4** (Potenzmethode | 4 Punkte). Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 5 \\ -5 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von $\mathbf{A}$.

(b) Berechnen Sie die ersten fünf Iterierten $(\mathbf{z}_k)_k$ der Potenzmethode im Falle des Startvektors $\mathbf{z}_0 = \frac{1}{3}[1, 2, 2]^\mathsf{T}$ und $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. Berechnen Sie explizit auch den Fehler der Näherung $\mu_k = \mathbf{z}_k^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{z}_k$ an den betragsgrössten Eigenwert von $\mathbf{A}$.