Übungsblatt 1.

Abgabe bis: **Montag, 27.09.2021, 12:00.**

Aufgabe 1 (Eigenwerte I | 4 Punkte).

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix. Zeigen Sie:

(a) Ist $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ ein Rechtseigenwert, dann ist λ auch ein Linkseigenwert.

(b) Ist $\mathbf{A}$ Hermitesch, so folgt $\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}$.

(c) Ist $\mathbf{A}$ eine Diagonalmatrix, so stehen die Eigenwerte auf der Diagonale.

(d) Ist $\mathbf{A}$ reell und $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ ein Eigenwert, dann ist auch $\overline{\lambda} \in \sigma(\mathbf{A})$ ein Eigenwert.

Hinweis. *Für einen Rechtseigenwert λ von $\mathbf{A}$ existiert ein Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, so dass $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Für einen Linkseigenwert μ von $\mathbf{A}$ existiert ein Vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$, so dass $\mathbf{u}^\star\mathbf{A} = \mu\mathbf{u}^\star$.*

Aufgabe 2 (Eigenwerte II | 4 Punkte).

Bestimmen Sie für jedes $\varepsilon > 0$ die Eigenpaare $(\lambda_{j,\varepsilon}, \mathbf{v}_{j,\varepsilon})$, $j = 1, 2$, der Matrix

$$\mathbf{A}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon\cos\frac{1}{\varepsilon} & \varepsilon\sin\frac{1}{\varepsilon} \\ \varepsilon\sin\frac{1}{\varepsilon} & 1 - \varepsilon\cos\frac{1}{\varepsilon} \end{bmatrix}.$$

Wie verhalten sich $\mathbf{A}_\varepsilon$, $\lambda_{j,\varepsilon}$ und $\mathbf{v}_{j,\varepsilon}$ im Grenzfall $\varepsilon \longrightarrow 0$?

Aufgabe 3 (Satz von Gerschgorin | 4 Punkte).

Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heisst *strikt diagonaldominant*, falls

$$|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Zeigen Sie: Ist $\mathbf{A}$ strikt diagonaldominant, so ist $\mathbf{A}$ invertierbar. Ist $\mathbf{A}$ reell, symmetrisch und gilt $a_{i,i} > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$, so ist $\mathbf{A}$ positiv definit.

Aufgabe 4 (Eigenwerteinschliessung | 4 Punkte).

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Geben Sie mithilfe der Sätze von Gerschgorin (angewandt auf $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^\intercal$) und Bendixson eine möglichst kleine Menge an, welche das Spektrum von $\mathbf{A}$ enthält. Skizzieren Sie diese Mengen in der komplexen Ebene.