Übungsblatt 1.

Bearbeiten bis: **Montag, 25.09.2023, 12:00.**

Aufgabe 1 (Eigenwerte I | 4 Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix. Zeigen Sie:

(a) Ist $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ ein Rechtseigenwert, dann ist λ auch ein Linkseigenwert.

(b) Ist $\mathbf{A}$ Hermitesch, so folgt $\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}$.

(c) Ist $\mathbf{A}$ eine Diagonalmatrix, so stehen die Eigenwerte auf der Diagonale.

(d) Ist $\mathbf{A}$ reell und $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ ein Eigenwert, dann ist auch $\overline{\lambda} \in \sigma(\mathbf{A})$ ein Eigenwert.

Hinweis. *Für einen Rechtseigenwert λ von $\mathbf{A}$ existiert ein Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, so dass $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Für einen Linkseigenwert μ von $\mathbf{A}$ existiert ein Vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$, so dass $\mathbf{u}^\star\mathbf{A} = \mu\mathbf{u}^\star$.*

Aufgabe 2 (Quadratwuzeln positiv definiter Matrizen | 4 Punkte). Gegeben sei die symmetrische und positiv definite Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 20 & -4 \\ -4 & 20 \end{bmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{A}$.

(b) Bestimmen Sie eine positiv definite Matrix $\mathbf{B}$, so dass $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$.

Hinweis. *Benutzen Sie die Spektralzerlegung von $\mathbf{A}$.*

(c) Existieren weitere Quadratwurzeln von $\mathbf{A}$? Sind diese positiv definit?

Aufgabe 3 (Eigenwerte II | 4 Punkte). Bestimmen Sie für jedes $\delta > 0$ die Eigenpaare $(\lambda_{k,\delta}, \mathbf{v}_{k,\delta})$, $k = 1, 2$, der Matrix

$$\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 1 + \delta \cos \frac{1}{\delta} & \delta \sin \frac{1}{\delta} \\ \delta \sin \frac{1}{\delta} & 1 - \delta \cos \frac{1}{\delta} \end{bmatrix}.$$

Wie verhalten sich $\mathbf{A}_\delta$, $\lambda_{k,\delta}$ und $\mathbf{v}_{k,\delta}$ im Grenzfall $\delta \to 0$?

Aufgabe 4 (Satz von Gerschgorin | 4 Punkte). Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heisst *strikt diagonaldominant*, falls

$$|a_{k,k}| > \sum_{\ell\neq k} |a_{k,\ell}|, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Gerschgorin: Ist $\mathbf{A}$ strikt diagonaldominant, so ist $\mathbf{A}$ invertierbar. Ist $\mathbf{A}$ reell, symmetrisch und gilt $a_{k,k} > 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$, so ist $\mathbf{A}$ positiv definit.