

Hochdimensionale Approximationsmethoden

Skript zur Vorlesung
im
Frühjahrssemester 2025

Helmut Harbrecht

Stand: 5. März 2025

Vorwort

Diese Mitschrift kann und soll nicht ganz den Wortlaut der Vorlesung wiedergeben. Sie soll das Nacharbeiten des Inhalts der Vorlesung erleichtern. Die vorgestellten Resultate sind zumeist aus der Originalliteratur entnommen:

- [1] H.-J. Bungartz and M. Griebel. Sparse grids. *Acta Numerica*, 13:147–269, 2004.
- [2] M. Griebel and H. Harbrecht. On the construction of sparse tensor product spaces. *Math. Comput.*, 82(282):975–994, 2013.
- [3] M. Griebel and H. Harbrecht. A note on the construction of L -fold sparse tensor product spaces. *Constr. Approx.*, 38(2):235–251, 2013.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	4
1.1	Motivation	4
1.2	Multiskalenanalyse	4
1.3	Tensorprodukte	6
2	Dünne Gitter	8
2.1	Tensorproduktapproximation	8
2.2	Dünne Tensorproduktapproximation	9
2.3	Optimale Konvergenzrate	13
2.4	Approximation isotroper Funktionen	16

1. Einführung

1.1 Motivation

Gegeben sei ein beschränktes, hinreichend glattes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine geschachtelte Folge von Finite-Element-Räumen

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset L^2(\Omega).$$

Dabei bestehe V_j aus Finiten Elementen der Ordnung p , das heisst, aus stückweise polynomialen Funktionen vom Grad $p-1$, definiert auf Zerlegungen mit Schrittweite $h_j \sim 2^{-j}$. Wie man sich leicht überlegt, gilt dann $\dim V_j \sim 2^{jn}$. Die Konstante in dieser Abschätzung hängt vom Polynomgrad ab, aber nicht vom Level j .

Im folgenden bezeichne $P_j : L^2(\Omega) \rightarrow V_j$ die L^2 -orthogonale Projektion von Funktionen aus $L^2(\Omega)$ auf den Finite-Element-Raum V_j . Für eine Funktion $f \in H^p(\Omega)$ folgt dann aus den Standardabschätzungen für finite Elemente die von j unabhängige Fehlerschranke

$$\|f - P_j f\|_{L^2(\Omega)} \leq ch_j^p \|f\|_{H^p(\Omega)}. \quad (1.1)$$

Da $\dim V_j \sim 2^{jn}$ gilt, können wir mit N Freiheitsgraden eine gegebene Funktion $f \in H^p(\Omega)$ mit der Rate

$$\|f - P_j f\|_{L^2(\Omega)} \leq cN^{-\frac{p}{n}} \|f\|_{H^p(\Omega)}.$$

approximieren. Für eine gewünschte Genauigkeit $\varepsilon > 0$ haben wir also die Kosten-Nutzen-Beziehung $N \sim \varepsilon^{-\frac{n}{p}}$. Speziell sehen wir, dass die Freiheitsgrade für eine feste Genauigkeit ε exponentiell mit der Dimension n anwachsen. Dieses Phänomen ist als *Fluch der Dimension* bekannt, da in Anbetracht endlicher Ressourcen bei einem naiven Vorgehen die Anzahl n der behandelbaren Dimensionen doch stark beschränkt ist.

Wir werden in dieser Vorlesung Voraussetzungen und zugehörige Verfahren kennenlernen, die es ermöglichen, den Fluch der Dimension zu vermeiden oder zumindest abzumildern. Dazu benötigen wir eine *Multiskalenanalyse*.

1.2 Multiskalenanalyse

Sei für $j > 0$

$$Q_j : L^2(\Omega) \rightarrow V_j, \quad Q_j := P_j - P_{j-1} \quad (1.2)$$

derjenige Projektor, der $L^2(\Omega)$ auf den Differenzraum

$$W_j := V_j \ominus V_{j-1} \subset L^2(\Omega) \quad (1.3)$$

abbildet. Ferner setzen wir $Q_0 = P_0$ und $W_0 = V_0$. Man prüft leicht nach, dass Q_j ebenfalls ein Orthogonalprojektor ist, der auf den Raum W_j abbildet. Speziell erhält man rekursiv die *Multiskalenzelregung* von V_j :

$$\begin{aligned} V_j &= W_j \oplus V_{j-1} \\ &= W_j \oplus W_{j-1} \oplus V_{j-2} \\ &= \dots \\ &= W_j \oplus W_{j-1} \oplus \dots \oplus W_0. \end{aligned}$$

Da die Räume V_j für $j \rightarrow \infty$ den $L^2(\Omega)$ ausschöpfen, es also gilt

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{N}_0} V_j} = L^2(\Omega),$$

ergibt sich die Identität

$$L^2(\Omega) = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}_0} W_j. \quad (1.4)$$

Lemma 1.1 Jede Funktion $f \in L^2(\Omega)$ kann zerlegt werden gemäss

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j f \quad (1.5)$$

und es gilt

$$\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \|Q_j f\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Beweis. Gleichung (1.5) ergibt sich sofort aus (1.4) und $W_j = Q_j(L^2(\Omega))$. Die Identität der Normen ist eine unmittelbare Konsequenz aus der Orthogonalität der Projektoren Q_j , denn es gilt

$$(Q_j f, Q_{j'} f)_{L^2(\Omega)} = \begin{cases} \|Q_j f\|_{L^2(\Omega)}^2, & j = j', \\ 0, & j \neq j'. \end{cases}$$

□

Bemerkung Die Zerlegung (1.5) entspricht einer Multiskalenzelregung der Funktion f , die etwa auch den *Wavelets* zugrundeliegt. △

Lemma 1.2 Für $f \in H^p(\Omega)$ und $j \in \mathbb{N}_0$ gilt die Abschätzung

$$\|Q_j f\|_{L^2(\Omega)} \leq c 2^{-jp} \|f\|_{H^p(\Omega)}. \quad (1.6)$$

Beweis. Gemäß Definition (1.2) gilt

$$\|Q_j f\|_{L^2(\Omega)} = \|(P_j - P_{j-1})f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f - P_j f\|_{L^2(\Omega)} + \|f - P_{j-1} f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Setzen wir nun die Fehlerabschätzungen (1.1) ein, so folgt

$$\|Q_j f\|_{L^2(\Omega)} \leq c(h_j^p + h_{j-1}^p) \|f\|_{H^p(\Omega)}.$$

In Anbetracht von $h_j \sim 2^{-j}$ und $h_{j-1} = 2h_j$ folgt daraus das Behauptete. \square

1.3 Tensorprodukte

Wir benötigen das Tensorprodukt von Hilbert-Räumen. Dieses definieren wir wie folgt:

Definition 1.3 Seien \mathcal{H}_i , $i = 1, 2$, zwei Hilbert-Räume mit Innenprodukt $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}_i}$ und Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_i}$. Betrachte den Raum

$$\mathcal{K} := \left\{ \sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i : u_i \in \mathcal{H}_1, v_i \in \mathcal{H}_2, n \in \mathbb{N} \right\}$$

mit den Operationen

$$\begin{aligned} u_1 \otimes v + u_2 \otimes v &= (u_1 + u_2) \otimes v, \\ u \otimes v_1 + u \otimes v_2 &= u \otimes (v_1 + v_2), \\ \alpha(u \otimes v) &= (\alpha u) \otimes v = u \otimes (\alpha v). \end{aligned}$$

Das *Tensorprodukt* $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ von \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 ist dann definiert als Vervollständigung von \mathcal{K} bezüglich der durch das Innenprodukt

$$(u_1 \otimes v_1, u_2 \otimes v_2)_{\mathcal{K}} := (u_1, u_2)_{\mathcal{H}_1} (v_1, v_2)_{\mathcal{H}_2} \quad (1.7)$$

induzierten Norm.

Beispiel 1.4 Gegeben seien zwei Gebiete $\Omega_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$. Wir betrachten Funktionen $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ mit $\mathbf{x} \in \Omega_1$ und $\mathbf{y} \in \Omega_2$ und definieren den Raum

$$H_{mix}^{s,t}(\Omega_1 \times \Omega_2) := \{f \in L^2(\Omega_1 \times \Omega_2) : \|\partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} \partial_{\mathbf{y}}^{\beta} f\|_{L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)} < \infty \text{ für alle } |\alpha| \leq s, |\beta| \leq t\}.$$

Dieser Raum ist ein Hilbert-Raum zum Innenprodukt

$$(f, g)_{H_{mix}^{s,t}(\Omega_1 \times \Omega_2)} = \sum_{|\alpha| \leq s} \sum_{|\beta| \leq t} (\partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} \partial_{\mathbf{y}}^{\beta} f, \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} \partial_{\mathbf{y}}^{\beta} g)_{L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)}.$$

Insbesondere gilt

$$H_{mix}^{s,t}(\Omega_1 \times \Omega_2) \simeq H^s(\Omega_1) \otimes H^t(\Omega_2).$$

Der Raum $H_{mix}^{s,t}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ wird als *gemischter Sobolev-Raum* oder auch als *Sobolev-Raum mit dominierenden gemischten Ableitungen* bezeichnet. \triangle

Hat man vollständige Orthonormalsysteme $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ von $\mathcal{H}_1 \subset L^2(\Omega_1)$ und $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ von $\mathcal{H}_2 \subset L^2(\Omega_2)$, so bildet $\{\varphi_i \otimes \psi_j\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem vom Tensorprodukt $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \subset L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Daher können alle Funktionen aus $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ geschrieben

werden als

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f_{i,j} \varphi_i(\mathbf{x}) \psi_j(\mathbf{y}) \text{ mit } \{f_{i,j}\} \in \ell^2(\mathbb{N}^2),$$

wobei $\mathbf{x} \in \Omega_1$ und $\mathbf{y} \in \Omega_2$ gelte. Dies bedeutet, für $u \in \mathcal{H}_1$ und $v \in \mathcal{H}_2$ können wir das Tensorprodukt $u \otimes v \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ gefahrlos identifizieren mit dem punktweisen Produkt

$$(u \otimes v)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u(\mathbf{x})v(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_1, \quad \mathbf{y} \in \Omega_2.$$

2. Dünne Gitter

2.1 Tensorproduktapproximation

Es seien $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ und $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$. Auf jedem Teilgebiet sei eine Multiskalenanalyse gegeben:

$$\begin{aligned} V_0^{(1)} &\subset V_1^{(1)} \subset V_2^{(1)} \subset \dots \subset L^2(\Omega_1), \\ V_0^{(2)} &\subset V_1^{(2)} \subset V_2^{(2)} \subset \dots \subset L^2(\Omega_2). \end{aligned}$$

Dabei nehmen wir an, dass die Finiten Elemente in $V_j^{(i)}$ jeweils von der Ordnung p_i sind. Kanonisch ist es, eine Funktion $f \in L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ im Tensorproduktraum $V_{j_1}^{(1)} \otimes V_{j_2}^{(2)}$ zu approximieren.

Lemma 2.1 Es gilt

$$\|f - (P_{j_1}^{(1)} \otimes P_{j_2}^{(2)})f\|_{L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)} \leq c \left(h_{j_1}^{p_1} \|f\|_{H_{mix}^{p_1, 0}(\Omega_1 \times \Omega_2)} + h_{j_2}^{p_2} \|f\|_{H_{mix}^{0, p_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)} \right).$$

Beweis. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned} &\|f - (P_{j_1}^{(1)} \otimes P_{j_2}^{(2)})f\|_{L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)} \\ &\leq \|f - (P_{j_1}^{(1)} \otimes I_{n_2})f\|_{L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)} + \|(P_{j_1}^{(1)} \otimes I_{n_2}) - (P_{j_1}^{(1)} \otimes P_{j_2}^{(2)})f\|_{L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)}. \end{aligned}$$

Da $P_{j_1}^{(1)}$ ein Orthoprojektor ist, schließen wir

$$\begin{aligned} &\|f - (P_{j_1}^{(1)} \otimes P_{j_2}^{(2)})f\|_{L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)} \\ &\leq \|f - (P_{j_1}^{(1)} \otimes I_{n_2})f\|_{L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)} + \|f - (I_{n_1} \otimes P_{j_2}^{(2)})f\|_{L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)}. \end{aligned}$$

In Anbetracht von (1.1) erhalten wir daraus die Behauptung. \square

Die Anzahl der Freiheitsgrade der Approximation von f in $V_{j_1}^{(1)} \otimes V_{j_2}^{(2)}$ ist proportional zu $2^{j_1 n_1 + j_2 n_2}$. Die bestmögliche Approximationsrate erhalten wir, wenn wir die Genauigkeiten äquilibrieren, das heißt, wenn wir die Level j_1 und j_2 so wählen, dass

$$j_1 p_1 = j_2 p_2$$

gilt. In diesem Fall folgt

$$\|f - (P_{j_1}^{(1)} \otimes P_{j_2}^{(2)})f\|_{L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)} \leq N^{-\frac{\frac{p_1}{n_1} + \frac{p_2}{n_2}}{\frac{p_1}{n_1} \frac{p_2}{n_2}}} \|f\|_{H_{mix}^{p_1, 0}(\Omega_1 \times \Omega_2) \cap H_{mix}^{0, p_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)}.$$

2.2 Dünne Tensorproduktapproximation

Wir definieren nun die Dünngitterräume.

Definition 2.2 Für $\sigma > 0$ und $J \in \mathbb{N}_0$ ist der Dünngitterraum $\widehat{V}_J^\sigma \subset L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ gegeben durch

$$\widehat{V}_J^\sigma = \bigoplus_{j_1\sigma + j_2/\sigma \leq J} W_{j_1}^{(1)} \otimes W_{j_2}^{(2)}.$$

Ausklammern unter Beachtung der Äquivalenz

$$j_1\sigma + j_2/\sigma \leq J \Leftrightarrow j_2 \leq J\sigma - j_1\sigma^2$$

liefert die Identität¹⁾

$$\widehat{V}_J^\sigma = \bigoplus_{j_1=0}^{J/\sigma} \bigoplus_{j_2=0}^{J\sigma - j_1\sigma^2} W_{j_1}^{(1)} \otimes W_{j_2}^{(2)} = \bigoplus_{j_1=0}^{J/\sigma} W_{j_1}^{(1)} \otimes V_{J\sigma - j_1\sigma^2}^{(2)} = \sum_{j_1=0}^{J/\sigma} (V_{j_1}^{(1)} \ominus V_{j_1-1}^{(1)}) \otimes V_{J\sigma - j_1\sigma^2}^{(2)}.$$

Diese Formel wird bei der sogenannten *Kombinationstechnik* ausgenutzt. Hierbei wird der Dünngitterapproximant $\widehat{f}_J \in \widehat{V}_J^\sigma$ einer Funktion $f \in L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ durch die Kombination unterschiedlicher Projektionen gebildet:

$$\widehat{f}_J = \sum_{j_1=0}^{J/\sigma} \left\{ (P_{j_1}^{(1)} \otimes P_{J\sigma - j_1\sigma^2}^{(2)})f - (P_{j_1-1}^{(1)} \otimes P_{J\sigma - j_1\sigma^2}^{(2)})f \right\}.$$

In Abbildung 2.1 befindet sich eine Illustration der Kombinationstechnik.

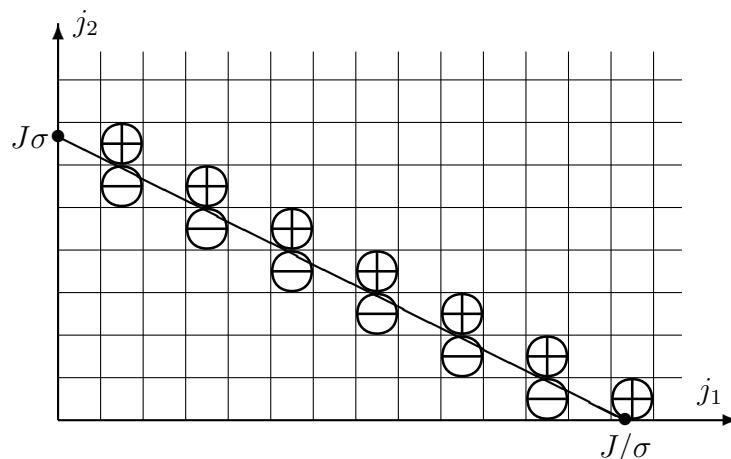


Abbildung 2.1: Die Kombinationstechnik im Dünngitterraum \widehat{V}_J^σ kombiniert alle Projektionen $(P_{j_1}^{(1)} \otimes P_{j_2}^{(2)})f$ mit positivem Vorzeichen (“ \oplus ”) und negativen Vorzeichen (“ \ominus ”).

¹⁾Wir vernachlässigen der Einfachheit halber allfällige Rundungsoperationen bei den Indizes.

Bemerkung Im Gegensatz zum Dünngitterraum, wäre der “volle” Tensorproduktraum charakterisiert durch

$$V_{J/\sigma}^{(1)} \otimes V_{J/\sigma}^{(2)} = \bigoplus_{\sigma j_1, j_2/\sigma \leq J} W_{j_1}^{(1)} \otimes W_{j_2}^{(2)}.$$

△

Speziell machen die folgende Wahlen des Parameters σ Sinn. Die Idee dabei ist, in den Räumen $W_{j_1}^{(1)} \otimes W_{j_2}^{(2)}$ mit den Indizes (j_1, j_2) mit $j_1\sigma + j_2/\sigma = J$ bezüglich unterschiedlicher Aspekte zu äquilibrieren. Hierzu genügt es, die extremalen Ansatzräume $V_{J/\sigma}^{(1)}$ bezüglich Ω_1 und $V_{J/\sigma}^{(2)}$ bezüglich Ω_2 zu betrachten:

- Für $\sigma = \sqrt{n_1/n_2}$ werden die Freiheitsgrade äquilibriert, das heißt, es ist $\dim V_{J/\sigma}^{(1)} \sim 2^{J/\sqrt{n_1 n_2}} \sim \dim V_{J/\sigma}^{(2)}$.
- Für $\sigma = \sqrt{p_1/p_2}$ werden die Genauigkeiten äquilibriert, das heißt, es ist $h_{J/\sigma}^{p_1} \sim 2^{-J\sqrt{p_1 p_2}} \sim h_{J/\sigma}^{p_2}$.
- Für $\sigma = \sqrt{(n_1 + p_1)/(n_2 + p_2)}$ wird die *Kosten-Nutzen-Rate* äquilibriert, das heißt, es gilt

$$\frac{\dim V_{J/\sigma}^{(1)}}{h_{J/\sigma}^{p_1}} \sim \frac{\dim V_{J/\sigma}^{(2)}}{h_{J/\sigma}^{p_2}}.$$

In Abbildung 2.2 findet man die Indexmengen (j_1, j_2) , die zum Dünngitterraum \widehat{V}_J^σ gehören für die genannte Auswahl der Parameter σ .

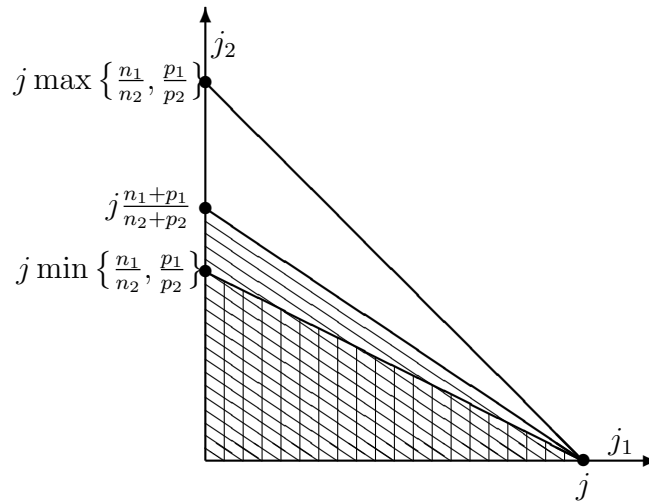


Abbildung 2.2: Die Indexmengen (j_1, j_2) der Dünngitterräume \widehat{V}_J^σ mit demselben Schnittpunkt j auf der j_1 -Achse für die drei unterschiedlichen Wahlen des Parameters σ .

Satz 2.3 Die Dimension des Dünngitterraums \widehat{V}_J^σ ist im wesentlichen $\mathcal{O}(2^{J \max\{n_1/\sigma, n_2\sigma\}})$. Genauer, es gilt

$$\dim \widehat{V}_J^\sigma \leq c \begin{cases} 2^{J \max\{n_1/\sigma, n_2\sigma\}}, & \text{falls } n_1/\sigma \neq n_2\sigma, \\ 2^{J n_2\sigma} J, & \text{falls } n_1/\sigma = n_2\sigma. \end{cases} \quad (2.1)$$

Beweis. Aufgrund von $\dim(W_{j_1}^{(1)} \otimes W_{j_2}^{(2)}) \sim 2^{j_1 n_1 + j_2 n_2}$ ergibt sich

$$\dim \widehat{V}_J^\sigma \sim \sum_{j_1=0}^{J/\sigma} \sum_{j_2=0}^{\sigma J - \sigma^2 j_1} 2^{j_1 n_1 + j_2 n_2} \leq c 2^{J n_2 \sigma} \sum_{j_1=0}^{J/\sigma} 2^{j_1 (n_1 - n_2 \sigma^2)}.$$

Ist nun $n_1/\sigma < n_2 \sigma$, dann ist der Exponent in der Summe immer negativ. Daraus folgt

$$\dim \widehat{V}_J^\sigma \leq c 2^{J n_2 \sigma}. \quad (2.2)$$

Ist hingegen $n_1/\sigma > n_2 \sigma$, dann ist der Exponent in der Summe immer positiv und wir schließen

$$\dim \widehat{V}_J^\sigma \leq c 2^{J n_2 \sigma} 2^{J/\sigma (n_1 - n_2 \sigma^2)} = c 2^{J n_1 / \sigma}. \quad (2.3)$$

Im Fall $n_1/\sigma = n_2 \sigma$ erhalten wir

$$\dim \widehat{V}_J^\sigma \leq c 2^{J n_2 \sigma} \sum_{j_1=0}^{J/\sigma} 1 \leq c 2^{J n_2 \sigma} \frac{J}{\sigma}. \quad (2.4)$$

Die Kombination von (2.2)–(2.4) liefert die Behauptung. \square

Bemerkungen

1. Die Konstante in Abschätzung (2.1) hängt von der Wahl von σ ab.
2. Abschätzung (2.1) ist scharf, da $\dim W_{J/\sigma}^{(1)} \sim 2^{J n_1 / \sigma}$ und $\dim W_{\sigma J}^{(2)} \sim 2^{J n_2 \sigma}$. Daher haben wir immer die untere Schranke $2^{J \max\{n_1/\sigma, n_2 \sigma\}}$.

\triangle

Satz 2.4 Für $f \in H_{mix}^{p_1, p_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ genügt die Approximation

$$\widehat{f}_J = \sum_{j_1 \sigma + \frac{j_2}{\sigma} \leq J} (Q_{j_1}^{(1)} \otimes Q_{j_2}^{(2)}) f \in \widehat{V}_J^\sigma \quad (2.5)$$

der Abschätzung

$$\|f - \widehat{f}_J\|_{L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)} \leq c \begin{cases} 2^{-J \min\{p_1/\sigma, p_2 \sigma\}} \|f\|_{H_{mix}^{p_1, p_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)}, & \text{falls } p_1/\sigma \neq p_2 \sigma, \\ 2^{-J p_1/\sigma} \sqrt{J} \|f\|_{H_{mix}^{p_1, p_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)}, & \text{falls } p_1/\sigma = p_2 \sigma. \end{cases} \quad (2.6)$$

Beweis. In Anbetracht von (1.5) und (1.6) folgt

$$\begin{aligned} \|f - \widehat{f}_J\|_{L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)}^2 &= \sum_{j_1 \sigma + \frac{j_2}{\sigma} > J} \|(Q_{j_1}^{(1)} \otimes Q_{j_2}^{(2)}) f\|_{L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)}^2 \\ &\leq c \sum_{j_1 \sigma + \frac{j_2}{\sigma} > J} 2^{-2(p_1 j_1 + p_2 j_2)} \|f\|_{H_{mix}^{p_1, p_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)}^2. \end{aligned}$$

Wir teilen die Indexmenge

$$I := \left\{ (j_1, j_2) : j_1\sigma + \frac{j_2}{\sigma} > J \right\}$$

in zwei disjunkte Mengen $I = I_1 \cup I_2$ auf gemäß

$$I_1 := \left\{ (j_1, j_2) : 0 \leq j_1 \leq \frac{J}{\sigma}, J\sigma - j_1\sigma^2 < j_2 \right\},$$

$$I_2 := \left\{ (j_1, j_2) : \frac{J}{\sigma} < j_1, 0 \leq j_2 \right\}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & \|f - \widehat{f}_J\|_{L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)}^2 \\ & \leq c \left\{ \sum_{j_1=0}^{J/\sigma} \sum_{j_2=J\sigma-j_1\sigma^2+1}^{\infty} 2^{-2(p_1j_1+p_2j_2)} + \sum_{j_1=J/\sigma+1}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} 2^{-2(p_1j_1+p_2j_2)} \right\} \|f\|_{H_{mix}^{p_1,p_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)}^2 \\ & \leq c \left\{ \sum_{j_1=0}^{J/\sigma} 2^{-2j_1(p_1-p_2\sigma^2)-2Jp_2\sigma} + \sum_{j_1=J/\sigma+1}^{\infty} 2^{-2p_1j_1} \right\} \|f\|_{H_{mix}^{p_1,p_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)}^2 \\ & \leq c \left\{ \sum_{j_1=0}^{J/\sigma} 2^{-2j_1(p_1-p_2\sigma^2)-2Jp_2\sigma} + 2^{-2J\frac{p_1}{\sigma}} \right\} \|f\|_{H_{mix}^{p_1,p_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)}^2 \\ & = 2^{-2Jp_2\sigma} \left\{ \sum_{j_1=0}^{J/\sigma} 2^{-2j_1\sigma(\frac{p_1}{\sigma}-p_2\sigma)} + 2^{-2J(\frac{p_1}{\sigma}-p_2\sigma)} \right\} \|f\|_{H_{mix}^{p_1,p_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)}^2. \end{aligned}$$

Um diesen Ausdruck abzuschätzen, unterscheiden wir wieder drei Fälle.

Im Fall $p_1/\sigma < p_2\sigma$ finden

$$\begin{aligned} \|f - \widehat{f}_J\|_{L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)}^2 & \leq c 2^{-2Jp_2\sigma} \left\{ 2^{-2J(\frac{p_1}{\sigma}-p_2\sigma)} + 2^{-2J(\frac{p_1}{\sigma}-p_2\sigma)} \right\} \|f\|_{H_{mix}^{p_1,p_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)}^2 \\ & \leq c 2^{-2J\frac{p_1}{\sigma}} \|f\|_{H_{mix}^{p_1,p_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)}^2. \end{aligned}$$

Ist $p_1/\sigma > p_2\sigma$, so folgt

$$\begin{aligned} \|f - \widehat{f}_J\|_{L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)}^2 & \leq c 2^{-2Jp_2\sigma} \{1 + 1\} \|f\|_{H_{mix}^{p_1,p_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)}^2 \\ & \leq c 2^{-2Jp_2\sigma} \|f\|_{H_{mix}^{p_1,p_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)}^2. \end{aligned}$$

Gilt schließlich $p_1/\sigma = p_2\sigma$, dann finden wir

$$\begin{aligned} \|f - \widehat{f}_J\|_{L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)}^2 & \leq c 2^{-2Jp_2\sigma} \left\{ \sum_{j_1=0}^{J/\sigma} 1 + 1 \right\} \|f\|_{H_{mix}^{p_1,p_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)}^2 \\ & \leq c 2^{-2Jp_2\sigma} \frac{J}{\sigma} \|f\|_{H_{mix}^{p_1,p_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)}^2. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis vollständig erbracht. □

Durch Kombination der Sätze 2.3 und 2.4 können wir die Konvergenzrate bezüglich der Anzahl $N := \dim \widehat{V}_J^\sigma$ von Freiheitsgraden ausdrücken. Das liefert uns die Kostenkomplexität im Dünngitterraum \widehat{V}_J^σ .

Korollar 2.5 Sei $f \in H_{mix}^{p_1, p_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ und bezeichne $N := \dim \widehat{V}_J^\sigma$ die Anzahl der Freiheitsgrade im Dünngitterraum \widehat{V}_J^σ . Ferner setzen wir

$$\alpha := \frac{\min\{p_1/\sigma, p_2\sigma\}}{\max\{n_1/\sigma, n_2\sigma\}}.$$

Falls $n_1/\sigma \neq n_2\sigma$ ist, dann erfüllt die Approximation (2.5) aus \widehat{V}_J^σ die Fehlerabschätzung

$$\|f - \widehat{f}_J\|_{L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)} \leq c \begin{cases} N^{-\alpha} \|f\|_{H_{mix}^{p_1, p_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)}, & \text{falls } p_1/\sigma \neq p_2\sigma, \\ N^{-\alpha} \sqrt{\log N} \|f\|_{H_{mix}^{p_1, p_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)}, & \text{falls } p_1/\sigma = p_2\sigma. \end{cases}$$

Gilt hingegen $n_1/\sigma = n_2\sigma$, so haben wir

$$\|f - \widehat{f}_J\|_{L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)} \leq c \begin{cases} N^{-\alpha} (\log N)^\alpha \|f\|_{H_{mix}^{p_1, p_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)}, & \text{falls } p_1/\sigma \neq p_2\sigma, \\ N^{-\alpha} (\log N)^{\alpha + \frac{1}{2}} \|f\|_{H_{mix}^{p_1, p_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)}, & \text{falls } p_1/\sigma = p_2\sigma. \end{cases}$$

Beweis. Gilt $n_1/\sigma \neq n_2\sigma$, so haben wir $N \sim 2^{J \max\{n_1/\sigma, n_2\sigma\}}$ wegen (2.1). Daher gilt

$$N^{-\alpha} = N^{-\frac{\min\{p_1/\sigma, p_2\sigma\}}{\max\{n_1/\sigma, n_2\sigma\}}} \sim 2^{-J \min\{p_1/\sigma, p_2\sigma\}},$$

was zusammen mit (2.6) auf die erste Fehlerabschätzung führt.

Falls $n_1/\sigma = n_2\sigma$ gilt, so enthält der Dünngitterraum \widehat{V}_J^σ $N \sim 2^{J n_2\sigma} J = 2^{J \max\{n_1/\sigma, n_2\sigma\}} J$ Freiheitsgrade. In Anbetracht von $J \sim \log(N/J) \leq c \log N$ erhalten wir aus (2.6) die Abschätzung

$$\|f - \widehat{f}_J\|_{L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)} \leq c \left(\frac{N}{\log N} \right)^{-\alpha} \|f\|_{H_{mix}^{p_1, p_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)},$$

vorausgesetzt es ist $p_1/\sigma \neq p_2\sigma$.

Im Fall von $p_1/\sigma = p_2\sigma$ muss ein zusätzlicher Faktor $\sqrt{J} \leq c\sqrt{\log N}$ hinzugefügt werden als multiplikativer Faktor. Dies vervollständigt den Beweis. \square

2.3 Optimale Konvergenzrate

Wir zeigen zunächst das folgende Resultat:

Lemma 2.6 Es sei $\frac{p_1}{n_1} \neq \frac{p_2}{n_2}$ und sei σ von der Form

$$\sigma = \sqrt{\frac{(1-\lambda)n_1 + \lambda p_1}{(1-\lambda)n_2 + \lambda p_2}}, \quad \lambda \in (0, 1). \quad (2.7)$$

Dann konvergiert die Approximation einer Funktion $f \in H_{mix}^{p_1, p_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ im Dünngitterraum \widehat{V}_f^σ mit der Rate

$$\mathcal{O}\left(N^{-\min\left\{\frac{p_1}{n_1}, \frac{p_2}{n_2}\right\}}\right). \quad (2.8)$$

Beweis. Angenommen, es gilt $\frac{p_1}{n_1} < \frac{p_2}{n_2}$. Dann folgt aufgrund der Ungleichungen

$$\begin{aligned} p_1((1-\lambda)n_2 + \lambda p_2) &< p_2((1-\lambda)n_1 + \lambda p_1), \\ n_1((1-\lambda)n_2 + \lambda p_2) &> n_2((1-\lambda)n_1 + \lambda p_1), \end{aligned}$$

dass

$$\min\left\{\frac{p_1}{\sigma}, p_2\sigma\right\} = \frac{p_1}{\sigma} \quad \text{und} \quad \max\left\{\frac{n_1}{\sigma}, n_2\sigma\right\} = \frac{n_1}{\sigma}.$$

Analog gilt im Fall $\frac{p_1}{n_1} > \frac{p_2}{n_2}$, dass

$$\min\left\{\frac{p_1}{\sigma}, p_2\sigma\right\} = p_2\sigma \quad \text{und} \quad \max\left\{\frac{n_1}{\sigma}, n_2\sigma\right\} = n_2\sigma.$$

Mit Blick auf Korollar 2.5 schließen wir daher auf die Kostenkomplexität

$$\mathcal{O}\left(N^{-\frac{\min\{p_1/\sigma, p_2\sigma\}}{\max\{n_1/\sigma, n_2\sigma\}}}\right) = \mathcal{O}\left(N^{-\min\left\{\frac{p_1}{n_1}, \frac{p_2}{n_2}\right\}}\right).$$

□

Bemerkungen

1. Im Grenzfall $\lambda = 0$ gilt $\sigma = \sqrt{n_1/n_2}$ und wir haben $n_1/\sigma = n_2\sigma = \sqrt{n_1 n_2}$. Wegen Satz 2.3 enthält der Dünngitterraum \widehat{V}_f^σ dann $\mathcal{O}(2^{J\sqrt{n_1 n_2}} J)$ Freiheitsgrade. Deshalb muss der logarithmische Term $(\log N)^{\min\{\frac{p_1}{n_1}, \frac{p_2}{n_2}\}}$ als multiplikativer Faktor in (2.8) hinzugefügt werden.
2. Im Grenzfall $\lambda = 1$ ist $\sigma = \sqrt{p_1/p_2}$ und folglich $p_1/\sigma = p_2\sigma = \sqrt{p_1 p_2}$. Aus Satz 2.4 ergibt sich nur die Konvergenzrate $\mathcal{O}(2^{-J\sqrt{p_1 p_2}} \sqrt{J})$ im Dünngitterraum \widehat{V}_f^σ . Daher muss der logarithmische Term $\sqrt{\log(N)}$ als multiplikativer Faktor in (2.8) hinzugefügt werden.
3. Ist $\frac{p_1}{n_1} = \frac{p_2}{n_2}$, dann folgt $n_1/\sigma = n_2\sigma$ und $p_1/\sigma = p_2\sigma$ für alle $\lambda = [0, 1]$. In diesem Fall müssen beide logarithmische Terme als multiplikative Faktoren in (2.8) hinzugefügt werden.

△

Man überprüft leicht, dass $\sigma = \sigma(\lambda)$ aus (2.7) der Ungleichung

$$\min\left\{\frac{p_1}{p_2}, \frac{n_1}{n_2}\right\} \leq \sigma^2 \leq \max\left\{\frac{p_1}{p_2}, \frac{n_1}{n_2}\right\} \quad \text{für alle } \lambda \in [0, 1] \quad (2.9)$$

genügt. Insbesondere ist die Funktion $\sigma = \sigma(\lambda)$ stetig in λ , so dass alle Werte im Intervall angenommen werden. Via Lemma 2.6 und anschließender Bemerkung haben wir also alle möglichen Werte von σ mit (2.9) abgedeckt. Das nachfolgende Lemma zeigt nun, dass sich die Konvergenzrate (2.8) verschlechtert, wenn σ nicht aus diesem Intervall stammt.

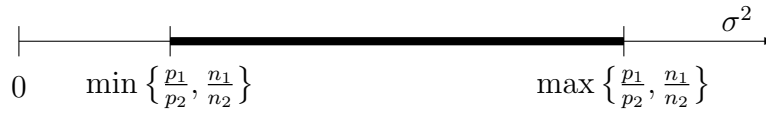


Abbildung 2.3: Die optimale Konvergenzrate wird erzielt für alle σ^2 , die im Intervall $(\min\{\frac{p_1}{p_2}, \frac{n_1}{n_2}\}, \max\{\frac{p_1}{p_2}, \frac{n_1}{n_2}\})$ liegen. Ist σ^2 ein Endpunkt dieses Intervalls, so tauchen logarithmische Faktoren auf. Die Konvergenzrate verringert sich substantiell außerhalb dieses Intervalls.

Lemma 2.7 Sei σ derart, dass

$$\sigma^2 < \min\left\{\frac{p_1}{p_2}, \frac{n_1}{n_2}\right\} \quad \text{oder} \quad \max\left\{\frac{p_1}{p_2}, \frac{n_1}{n_2}\right\} < \sigma^2.$$

Dann ist die Konvergenzrate substantiell kleiner als in (2.8).

Beweis. Unter der Annahme $\sigma^2 < \min\{\frac{p_1}{p_2}, \frac{n_1}{n_2}\}$ folgt

$$\min\left\{\frac{p_1}{p_2}, \sigma^2\right\} = \sigma^2 \quad \text{und} \quad \max\left\{\frac{n_1}{n_2}, \sigma^2\right\} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Gemäß Korollar 2.5 ist die Konvergenzrate dann im wesentlichen von der Ordnung

$$\mathcal{O}\left(N^{-\frac{\min\{\frac{p_1}{\sigma}, p_2\sigma\}}{\max\{\frac{n_1}{\sigma}, n_2\sigma\}}}\right) = \mathcal{O}\left(N^{-\frac{\frac{p_2}{\sigma} \min\{\frac{p_1}{p_2}, \sigma^2\}}{\frac{n_2}{\sigma} \max\{\frac{n_1}{n_2}, \sigma^2\}}}\right) = \mathcal{O}\left(N^{-\frac{p_2\sigma^2}{n_1}}\right).$$

Es verbleibt daher zu zeigen, dass

$$\frac{p_2\sigma^2}{n_1} < \min\left\{\frac{p_1}{n_1}, \frac{p_2}{n_2}\right\}.$$

Aber diese Ungleichung ergibt sich sofort aus

$$\frac{p_2\sigma^2}{n_1} < \frac{p_1}{n_1} \Leftrightarrow \sigma^2 < \frac{p_1}{p_2} \quad \text{and} \quad \frac{p_2\sigma^2}{n_1} < \frac{p_2}{n_2} \Leftrightarrow \sigma^2 < \frac{n_1}{n_2}.$$

Analog zeigt man die Behauptung im Fall $\max\{\frac{p_1}{p_2}, \frac{n_1}{n_2}\} < \sigma^2$, wo die Konvergenzrate im wesentlichen $\mathcal{O}(N^{-p_1/(n_2\sigma^2)})$ ist. \square

Wir wollen zum Schluss noch anmerken, dass im Fall einer Funktion $f \in H_{mix}^{s_1, s_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ mit $0 < s_1 \leq p_1$ und $0 < s_2 \leq p_2$ alle vorherigen Überlegungen analog sind mit einer möglicherweise reduzierten Rate $\mathcal{O}(N^{-\min\{\frac{s_1}{n_1}, \frac{s_2}{n_2}\}})$, falls der Parameter σ aus dem Intervall

$$\min\left\{\frac{s_1}{s_2}, \frac{n_1}{n_2}\right\} \leq \sigma^2 \leq \max\left\{\frac{s_1}{s_2}, \frac{n_1}{n_2}\right\} \quad (2.10)$$

stammt. Wenn als für beliebiges s_1 und s_2 immer eine (im wesentlichen) optimale Konvergenzrate erzielt werden soll, dann muss $\sigma = \sqrt{n_1/n_2}$ gewählt werden, so dass die Freiheitsgrade äquilibriert werden.

2.4 Approximation isotroper Funktionen

Wir wollen nun die Approximationsrate für Funktionen $f \in H^q(\Omega_1 \times \Omega_2)$ untersuchen. Falls $q \geq p_1 + p_2$ ist, so folgt $H^q(\Omega_1 \times \Omega_2) \subset H_{mix}^{p_1, p_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ und es gelten die Aussagen aus dem vorherigen Abschnitt. Daher wollen wir von $q < p_1 + p_2$ ausgehen. Die höchste Konvergenzrate wird in diesem Fall erzielt, wenn das Minimum von s_1/σ und $s_2\sigma$ unter der Bedingung $s_1 + s_2 = q$ maximal ist. Da wir das Optimum für $s_1/\sigma = s_2\sigma$ erhalten, schließen wir auf die Wahl

$$s_1 := \min \left\{ \frac{q\sigma^2}{\sigma^2 + 1}, p_1 \right\}, \quad s_2 := \min \left\{ \frac{q}{\sigma^2 + 1}, p_2 \right\}. \quad (2.11)$$

Wir erhalten damit das folgende Resultat in Abhängigkeit von σ :

Satz 2.8 Gegeben sei $f \in H^q(\Omega_1 \times \Omega_2)$ und sei σ gewählt wie in (2.7). Sofern gilt

$$\frac{q\sigma}{\sigma^2 + 1} \geq \min \left\{ \frac{p_1}{\sigma}, p_2\sigma \right\}, \quad (2.12)$$

wird die Funktion f in \widehat{V}_J^σ mit der bestmöglichen Rate approximiert gemäß Lemma 2.6 und der anschließenden Bemerkung. Andernfalls erhalten wir im wesentlichen, also bis auf $\log N$ -Terme, die reduzierte Rate $\mathcal{O}(N^{-\beta})$ mit

$$\beta = \frac{q}{n_1} \frac{(1 - \lambda)n_1 + \lambda p_1}{(1 - \lambda)(n_1 + n_2) + \lambda(p_1 + p_2)} \quad \text{falls } \frac{p_1}{n_1} \leq \frac{p_2}{n_2}$$

und

$$\beta = \frac{q}{n_2} \frac{(1 - \lambda)n_2 + \lambda p_2}{(1 - \lambda)(n_1 + n_2) + \lambda(p_1 + p_2)} \quad \text{falls } \frac{p_1}{n_1} > \frac{p_2}{n_2}.$$

Beweis. Seien s_1, s_2 wie in (2.11) gewählt. Dann folgt

$$\min \left\{ \frac{s_1}{\sigma}, s_2\sigma \right\} = \min \left\{ \frac{q\sigma}{\sigma^2 + 1}, \frac{p_1}{\sigma}, p_2\sigma \right\}.$$

Im Fall von (2.12) folgt die Behauptung sofort wegen

$$\min \left\{ \frac{s_1}{\sigma}, s_2\sigma \right\} = \min \left\{ \frac{p_1}{\sigma}, p_2\sigma \right\}$$

und Korollar 2.5. Wir können daher annehmen, dass

$$\frac{q\sigma}{\sigma^2 + 1} < \min \left\{ \frac{p_1}{\sigma}, p_2\sigma \right\}$$

gilt, woraus sich

$$\min \left\{ \frac{s_1}{\sigma}, s_2\sigma \right\} = \frac{q\sigma}{\sigma^2 + 1}$$

ergibt. Im Fall von $\frac{p_1}{n_1} \leq \frac{p_2}{n_2}$ folgt aus (2.7), dass $\max\{n_1/\sigma, n_2\sigma\} = n_1/\sigma$ und die Konvergenzrate ist im wesentlichen

$$\mathcal{O}\left(N^{-\frac{\frac{q\sigma}{1+\sigma^2}}{\max\{\frac{n_1}{\sigma}, n_2\sigma\}}}\right) = \mathcal{O}\left(N^{-\frac{q}{n_1} \frac{(1-\lambda)n_1 + \lambda p_1}{(1-\lambda)(n_1+n_2) + \lambda(p_1+p_2)}}\right). \quad (2.13)$$

Gilt hingegen $\frac{p_1}{n_1} > \frac{p_2}{n_2}$, so folgt $\max\{n_1/\sigma, n_2\sigma\} = n_2\sigma$ und die Konvergenzrate ist im wesentlichen

$$\mathcal{O}\left(N^{-\frac{\frac{q\sigma}{1+\sigma^2}}{\max\{\frac{n_1}{\sigma}, n_2\sigma\}}}\right) = \mathcal{O}\left(N^{-\frac{q}{n_2} \frac{(1-\lambda)n_2 + \lambda p_2}{(1-\lambda)(n_1+n_2) + \lambda(p_1+p_2)}}\right). \quad (2.14)$$

Damit ist der Beweis vollständig erbracht. \square

Bemerkung Für $\sigma = \sqrt{p_1/p_2}$, das heißt $\lambda = 1$, führt die Wahl von s_1, s_2 gemäß (2.11) auf $s_1 = p_1 \min\left\{\frac{q}{p_1+p_2}, 1\right\} = p_1 \frac{q}{p_1+p_2}$ und $s_2 = p_2 \min\left\{\frac{q}{p_1+p_2}, 1\right\} = p_2 \frac{q}{p_1+p_2}$, vorausgesetzt es ist $q < p_1 + p_2$. In diesem Fall ist (2.12) nicht erfüllt und wir erhalten die reduzierte Konvergenzrate $\mathcal{O}(N^{-\gamma})$ mit

$$\gamma = \frac{\sqrt{p_1 p_2} \frac{q}{p_1+p_2}}{\max\left\{\frac{n_1}{\sigma}, n_2\sigma\right\}} = \frac{q}{p_1+p_2} \min\left\{\frac{p_1}{n_1}, \frac{p_2}{n_2}\right\}.$$

Diese Rate stimmt den Ausdrücken in (2.13) und (2.14) überein. \triangle

Wenn die maximale Konvergenzrate nicht erzielt wird, die ist die Wahl $\sigma = \sqrt{n_1/n_2}$ am besten:

Proposition 2.9 Sei $f \in H^q(\Omega_1 \times \Omega_2)$ gegeben mit $0 < q < p_1 + p_2$ und sei σ wie in (2.7). Dann ist die Approximation in \widehat{V}^σ umso besser, je kleiner der Parameter λ ist. Die höchste Konvergenzrate wird daher für die Wahl $\lambda = 0$ erzielt, das heißt $\sigma = \sqrt{n_1/n_2}$, während sich die kleinste Konvergenzrate für die Wahl $\lambda = 1$ ergibt, das heißt $\sigma = \sqrt{p_1/p_2}$.

Proof. Um die Aussage zu beweisen, genügt es nachzuweisen, dass für festes $q < p_1 + p_2$ die Konvergenzrate (2.13) und (2.14) kleiner werden, wenn der Parameter λ größer wird.

Wir nehmen zunächst $\frac{p_1}{n_1} < \frac{p_2}{n_2}$ an. Dann ist die Funktion

$$g(\lambda) := \frac{(1-\lambda)n_1 + \lambda p_1}{(1-\lambda)(n_1+n_2) + \lambda(p_1+p_2)}$$

monoton fallend, weil

$$g(\lambda)' = \frac{p_1 n_2 - n_1 p_2}{((1-\lambda)(n_1+n_2) + \lambda(p_1+p_2))^2} < 0.$$

Daher folgt für $\lambda < \mu$, dass

$$\frac{q}{n_1} \frac{(1-\lambda)n_1 + \lambda p_1}{(1-\lambda)(n_1+n_2) + \lambda(p_1+p_2)} > \frac{q}{n_1} \frac{(1-\mu)n_1 + \mu p_1}{(1-\mu)(n_1+n_2) + \mu(p_1+p_2)},$$

was in Anbetracht von (2.13) dem erste Teil der Aussage entspricht.

Analog ist die Funktion

$$h(\lambda) := \frac{(1 - \lambda)n_2 + \lambda p_2}{(1 - \lambda)(n_1 + n_2) + \lambda(p_1 + p_2)}$$

monoton fallend und der Voraussetzung $\frac{p_1}{n_1} > \frac{p_2}{n_2}$. Dies führt auf

$$\frac{q}{n_2} \frac{(1 - \lambda)n_2 + \lambda p_2}{(1 - \lambda)(n_1 + n_2) + \lambda(p_1 + p_2)} > \frac{q}{n_2} \frac{(1 - \mu)n_2 + \mu p_2}{(1 - \mu)(n_1 + n_2) + \mu(p_1 + p_2)}$$

für alle $\lambda < \mu$. Mit (2.14) entspricht dies dem zweiten Teil der Aussage. \square

Bemerkung Im Fall $q \leq p_1 = p_2$ ist die bestmögliche Konvergenzrate für die Approximation einer Funktion $f \in H^q(\Omega_1 \times \Omega_2)$ in einem vollen Tensorproduktansatzraum $\mathcal{O}(N^{-q/(n_1+n_2)})$, das heißt $N \lesssim \varepsilon^{-(n_1+n_2)/q}$. Aus Satz 2.8 folgt, dass im Dünngitterraum \widehat{V}_J^σ mit $\sigma = \sqrt{n_1/n_2}$ die gleiche Rate erzielt wird bis auf logarithmische Terme. Im Fall $q > p_1$ wird aber implizit gemischte Regularität ausgenutzt und die Konvergenzrate wird besser. \triangle

Index

gemischter Sobolev-Raum, 6

Kombinationstechnik, 9

Kosten-Nutzen-Rate, 10

Multiskalenregelung, 5

Sobolev-Raum

mit dominierenden gemischten Ableitungen, 6

Tensorprodukt, 6