



Übungsblatt 8.

Bearbeiten bis: Montag, 28.04.2025, 10:00

Aufgabe 1 (Multivariate Tensorprodukträume | 4 Punkte). Wir betrachten den n -dimensionalen Einheitswürfel $\square := (0, 1)^n$. Drücken Sie folgende Räume als Schnittmengen von Tensorprodukten aus:

- (a) $H^q(\square)$,
- (b) $\mathfrak{H}^{q,s}(\square)$.

Aufgabe 2 (Quasi-Normen | 4 Punkte). Sei $p \in (0, 1)$. Analog zu den bekannten Folgenräumen definieren wir ℓ^p als den Raum aller Folgen $\mathbf{u} = (u_k)_k$, so dass

$$\|\mathbf{u}\|_{\ell^p} := \left[\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $|x + y|^p \leq |x|^p + |y|^p$.
- (b) Folgern Sie, dass $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|_{\ell^p} \leq 2^{\frac{1}{p}} \max \{ \|\mathbf{u}\|_{\ell^p}, \|\mathbf{v}\|_{\ell^p} \}$ und zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass diese Abschätzung scharf ist.
- (c) Schliessen Sie, dass $\|\cdot\|_{\ell^p}$ eine *Quasi-Norm* ist, d.h., dass eine absolute Konstante $C > 0$ existiert, so dass $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|_{\ell^p} \leq C(\|\mathbf{u}\|_{\ell^p} + \|\mathbf{v}\|_{\ell^p})$. Finden Sie eine obere Schranke an C ?

Aufgabe 3 (Regularität der Eigenfunktionen | 4 Punkte). Sei $f \in H_{\text{mix}}^{(p,0)}(D_1 \times D_2)$. Wir definieren den Operator $\mathcal{S}$ wie üblich über das Integral

$$(\mathcal{S}u)(\mathbf{x}) := \int_{D_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{S} : L^2(D_2) \rightarrow H^p(D_1)$ stetig ist, wobei

$$\|\mathcal{S}\|_{L^2(D_2) \rightarrow H^p(D_1)} \leq \|f\|_{H_{\text{mix}}^{(p,0)}(D_1 \times D_2)}.$$

- (b) Wir betrachten die Singulärwertzerlegung $f = \sum_j \sqrt{\lambda_j} \phi_j \otimes \psi_j$. Zeigen Sie, dass

$$\|\phi_j\|_{H^p(D_1)} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \|f\|_{H_{\text{mix}}^{(p,0)}(D_1 \times D_2)}.$$

Aufgabe 4 (Vektorwertige Singulärwertzerlegung | 4 Punkte). Wir bezeichnen mit $L^2(D)$ den Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen $\mathbf{u} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{L^2(D)} := \int_D \mathbf{u}(\mathbf{x})^T \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \|\mathbf{u}\|_{L^2(D)} := \left[\int_D \|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|_2^2 d\mathbf{x} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

- (a) Sei $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(D_1 \times D_2)$. Zeigen Sie, dass die Operatoren $S : \mathbf{L}^2(D_2) \rightarrow \mathbf{L}^2(D_1)$ und $S^* : \mathbf{L}^2(D_1) \rightarrow \mathbf{L}^2(D_2)$, definiert durch

$$(S\mathbf{v})(\mathbf{x}) := \int_{D_2} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \mathbf{v}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad (S^*u)(\mathbf{y}) := \int_{D_1} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

stetig und zueinander adjungiert sind.

- (b) Zeigen Sie, dass die Operatoren $\mathcal{K} := SS^* : \mathbf{L}^2(D_1) \rightarrow \mathbf{L}^2(D_1)$ und $\tilde{\mathcal{K}} := S^*S : \mathbf{L}^2(D_2) \rightarrow \mathbf{L}^2(D_2)$ kompakt sind. Geben Sie die jeweiligen Kerne von $\mathcal{K}$ und $\tilde{\mathcal{K}}$ an.
- (c) Schliessen Sie, dass eine Singulärwertzerlegung von $\mathbf{f}$ der Form

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} \phi_j(\mathbf{x}) \boldsymbol{\psi}_j(\mathbf{y})$$

existiert, wobei $(\phi_j)_j$ eine Orthonormalbasis des Bildes von $\mathcal{K}$ in $\mathbf{L}^2(D_1)$ und $(\boldsymbol{\psi}_j)_j$ eine Orthonormalbasis des Bildes von $\tilde{\mathcal{K}}$ in $\mathbf{L}^2(D_2)$ ist.