Übungsblatt 7.

Bearbeiten bis: **Montag, 14.04.2025, 10:00**

Aufgabe 1 (Min-Max-Prinzip von Courant-Fischer | 4 Punkte). Sei H ein Hilbert-Raum und $\mathcal{K} : H \to H$ ein symmetrischer, positiv semidefiniter und kompakter Operator mit den Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0$. Zeigen Sie, dass

$$\lambda_k = \max_{\substack{V_k \subset H \\ \dim V_k = k}} \min_{\substack{v \in V_k \\ \|v\|=1}} \langle v, \mathcal{K}v \rangle, \qquad \lambda_{k+1} = \min_{\substack{V_k \subset H \\ \dim V_k = k}} \max_{\substack{v \in V_k^\perp \\ \|v\|=1}} \langle v, \mathcal{K}v \rangle.$$

Aufgabe 2 (Hyperbolisches Kreuz | 4 Punkte). Auf dem Einheitsintervall lässt sich eine Funktion u durch Projektion auf die ersten Fourier-Koeffizienten

$$\mathrm{P}_\alpha := \sum_{|k|<2^\alpha} \hat{u}(k) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k x}, \qquad \hat{u}(k) := \int_I u(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} k x} \, \mathrm{d}x.$$

approximieren. Auf dem n-dimensionalen Einheitswürfel $\square := [0,1]^n$ definieren wir für einen Multiindex $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n$ damit

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{\alpha}} := \mathrm{D}_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{D}_{\alpha_n}, \qquad \mathrm{D}_\alpha := \mathrm{P}_\alpha - \mathrm{P}_{\alpha-1},$$

wobei der Einfachheit halber $\mathrm{P}_{-1} := 0$ gelte.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{\alpha}} u \perp \mathrm{D}_{\boldsymbol{\beta}} u, \qquad \boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}.$$

(b) Wir definieren $Q_0 := \{\mathbf{0}\}$ und für $J \in \mathbb{N}$

$$Q_J := \bigcup_{|\boldsymbol{\alpha}|_1 = J} \left\{ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n : 2^{\alpha_i - 1} \leq |k_i| < 2^{\alpha_i},\ 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\left\| u - \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|_1 \leq J} \mathrm{D}_{\boldsymbol{\alpha}} u \right\|_{L^2(\square)} = \left\| u - \sum_{r \leq J} \sum_{\mathbf{k} \in Q_r} \hat{u}(\mathbf{k}) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \mathbf{k} \cdot} \right\|_{L^2(\square)} \lesssim 2^{-sJ} J^{\frac{n-1}{2}} \|u\|_{H^s_{\mathrm{mix}}(\square)}.$$

(c) Zeichnen Sie Q_j für $0 \leq j \leq 4$ in zwei Dimensionen.

Aufgabe 3 (Griebel-Knapek-Räume | 4 Punkte). Für $I := [0,1]$, $\square := I \times I$ sowie $q, s \in \mathbb{N}_0$ definieren wir den Griebel-Knapek-Raum

$$\mathfrak{H}^{q,s}(\square) := \left\{ u \in H^q(\square) : \partial^{\boldsymbol{\alpha}} u \in H^q(\square) \text{ für alle } |\boldsymbol{\alpha}|_\infty \leq s \right\}.$$

(a) Zeigen Sie über die Fourier-Transformation, dass

$$\mathfrak{H}^{q,s}(\square) = \left(H^{q+s}(I) \otimes H^s(I) \right) \cap \left(H^s(I) \otimes H^{s+q}(I) \right).$$

(b) Schliessen Sie, dass $H^q(\square) = \mathfrak{H}^{q,0}(\square)$ und $H^s_{\mathrm{mix}}(\square) = \mathfrak{H}^{0,s}(\square)$.

Aufgabe 4 (Verallgemeinertes Eigenwertproblem | 4 Punkte). Wir möchten das Eigenwertproblem $\mathcal{K}u = \lambda u$ für einen symmetrischen und positiv semi-definiten Hilbert-Schmidt-Operator $\mathcal{K}: L^2(D) \to L^2(D)$ numerisch lösen. Dafür sei $L^2(D)$ durch einen Finite-Elemente-Raum V_h mit $\dim V_h = N_\phi$ diskretisiert. Offensichtlich besitzt der Operator $\mathcal{K}_{N_\phi} := \mathrm{P}_{V_h} \mathcal{K} \mathrm{P}_{V_h}$ die Eigenwerte $\lambda_{1,N_\phi} \geq \cdots \geq \lambda_{N_\phi,N_\phi} \geq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle v_h, \mathcal{K}_{N_\phi} u_h \rangle_{L^2(D)} = \lambda \langle v_h, u_h \rangle_{L^2(D)}$ genau dann für alle $v_h \in V_h$ gilt, wenn $\mathbf{Ku} := \lambda \mathbf{Mu}$, wobei $\mathbf{u}$ den Koeffizientenvektor von u_h bezeichne und

$$\mathbf{K} := \left[\langle \phi_i, \mathcal{K}_{N_\phi} \phi_j \rangle_{L^2(D)} \right]_{i,j=1}^{N_\phi}, \qquad \mathbf{M} := \left[\langle \phi_i, \phi_j \rangle_{L^2(D)} \right]_{i,j=1}^{N_\phi}.$$

(b) Es bezeichne $\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\intercal$ die Cholesky-Zerlegung von $\mathbf{M}$. Zeigen Sie, dass das verallgemeinerte Eigenwertproblem $\mathbf{Ku} := \lambda \mathbf{Mu}$ äquivalent zum Eigenwertproblem $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{L}^{-\intercal}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ ist.

(c) Sei $\mathbf{u}_k = \mathbf{L}^{-\intercal}\mathbf{v}_k$ und $u_k := \sum_{i=1}^{N_\phi} [\mathbf{u}_k]_i \phi_i$. Zeigen Sie, dass die $(u_k)_k$ orthonormal in $L^2(D)$ sind.

(d) Für $M \leq N_\phi$ bezeichne R_M die $L^2(D)$-Orthogonalprojektion auf die M dominanten Eigenfunktionen u_k. Folgern Sie, dass der Koeffizientenvektor von $\mathrm{R}_M\, g$ gegeben ist durch

$$\sum_{k=1}^{M} \left(\mathbf{v}_k^\intercal \mathbf{L}\mathbf{g} \right) \mathbf{u}_k.$$