Übungsblatt 6.

Bearbeiten bis: **Montag, 07.04.2025, 10:00**

Aufgabe 1 (Tensorränge | 4 Punkte). Für $i = 1, 2$ seien $D_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ zwei Gebiete und $V_0^{(i)} \subset V_1^{(i)} \subset \cdots \subset L^2(D_i)$ geschachtelte, endlichdimensionale Ansatzräume mit $\dim V_j^{(i)} \sim 2^{jn_i}$. Analog bezeichnen wir mit $V_{\mathbf{j}} := V_{j_1}^{(1)} \otimes V_{j_2}^{(2)}$ einen Ansatzraum auf $L^2(D_1 \times D_2)$.

(a) Zeigen Sie, dass eine Funktion $u \in V_{\mathbf{j}}$ dargestellt werden kann als

$$u = \sum_{k=1}^{R} v_k \otimes w_k, \qquad R \sim 2^{\min\{j_1 n_1,\, j_2 n_2\}},$$

wobei R den Rang von u bezeichne.

(b) Es sei nun $u \in V_{\mathbf{j}}$ und $u' \in V_{\mathbf{j}'}$. Zeigen Sie, dass der Rang der Summe $u + u'$ durch die Summe der Ränge $R + R'$ von u und u' beschränkt ist.

Aufgabe 2 (Sandwich-Argument | 4 Punkte). Für $D_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ und $D_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ sei $f \in L^2(D_1 \times D_2)$ und $\mathcal{K} = \mathcal{S}\mathcal{S}^\star$ der Trace-Class-Operator mit Kern

$$\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \int_{D_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) f(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \,\mathrm{d}\mathbf{z}.$$

Es ist bekannt, dass die Summe der monoton fallenden Eigenwerte λ_ℓ von $\mathcal{K}$ der Abschätzung

$$\left[\sum_{\ell=M+1}^{\infty} \lambda_\ell\right]^{\frac{1}{2}} \lesssim M^{-\frac{q}{\min\{n_1,n_2\}}} \|f\|_{H^q(D_1 \times D_2)}$$

genügt.

(a) Zeigen Sie, dass

$$2^m \lambda_{2^{m+1}} \lesssim 2^{-\frac{2q}{\min\{n_1,n_2\}} m}.$$

(b) Schliessen Sie, dass

$$\lambda_\ell \lesssim \ell^{-\frac{2q}{\min\{n_1,n_2\}} - 1}.$$

Aufgabe 3 (Satz von Mercer | 4 Punkte). Sei H ein Hilbert-Raum und $\mathcal{L} : H \to H$ ein symmetrischer und positiv definiter Trace-Class-Operator mit Eigenpaaren (λ_k, ϕ_k). Für $\theta \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^\theta$ den linearen Operator, welche durch die Beziehungen $\mathcal{L}^\theta \phi_k := \lambda_k^\theta \phi_k$ induziert wird. Weiter seien H_+, H_- die Hilbert-Räume mit den Innenprodukten

$$\langle u, v\rangle_- := \left\langle \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} u,\, \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} v \right\rangle_H, \qquad \langle u, v\rangle_+ := \left\langle \mathcal{L}^{-\frac{1}{2}} u,\, \mathcal{L}^{-\frac{1}{2}} v \right\rangle_H.$$

(a) Zeigen Sie, dass $H_+ \hookrightarrow H \hookrightarrow H_-$ ein Gelfandscher Dreier ist.

(b) Sei nun $H = L^2(D)$ und

$$\kappa(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k(x) \phi_k(y).$$

Zeigen Sie, dass $\kappa(x, \cdot) \in H_+$ für fast alle $x \in D$ und dass

$$\left\langle \kappa(x, \cdot), u \right\rangle_+ = u(x).$$

Aufgabe 4 (Riesz-Basen II | 4 Punkte). Es sei H ein Hilbert-Raum und Ψ eine Riesz-Basis von H.

(a) Sei H' der Dualraum von H. Zeigen Sie, dass eine Basis $\tilde{\Psi}$ von H' existiert, welche biorthogonal zu Ψ ist, das heisst, dass jedes $\ell \in H'$ eine Darstellung $\ell = \sum_j d_j \tilde{\psi}_j$ besitzt, wobei $\tilde{\psi}_j(\psi_i) = \delta_{i,j}$.

(b) Zeigen Sie, dass die duale Basis $\tilde{\Psi}$ eine Riesz-Basis von H' ist.

(c) Zeigen Sie, dass die duale Basis $\tilde{\Psi}$ eindeutig ist.