Übungsblatt 5.

Bearbeiten bis: **Montag, 31.03.2025, 10:00**

Aufgabe 1 (Trace-Class-Operatoren | 4 Punkte). Es sei H ein Hilbert-Raum und $\mathcal{K}: H \to H$ ein symmetrischer und positiv semidefiniter und kompakter Operator. Ist $(u_j)_j$ eine Orthonormalbasis von H, bezeichnen wir mit

$$\operatorname{trace} \mathcal{K} := \sum_j \langle u_j, \mathcal{K} u_j \rangle$$

die Spur von $\mathcal{K}$ bezüglich $(u_j)_j$.

(a) Zeigen Sie, dass die Spur nicht von der gewählten Orthonormalbasis abhängt.

(b) Folgern Sie, dass

$$\operatorname{trace} \mathcal{K} = \sum_j \lambda_j,$$

wobei λ_j die Eigenwerte von $\mathcal{K}$ seien.

(c) Wir bezeichnen einen Operator $\mathcal{K}$ mit $\operatorname{trace} \mathcal{K} < \infty$ als *Trace-Class-Operator*. Zeigen Sie, dass das Produkt zweier Trace-Class-Operatoren wieder ein Trace-Class-Operator ist.

Aufgabe 2 (Abstrakte Hilbert-Schmidt-Operatoren | 4 Punkte). Seien H_1, H_2 zwei separable Hilbert-Räume mit Orthonormalbasen $(u_j)_j$ und $(v_j)_j$. Für zwei lineare Operatoren $\mathcal{K}, \mathcal{L}: H_1 \to H_2$ definieren wir das Innenprodukt und die zugehörige Norm

$$\langle \mathcal{K}, \mathcal{L} \rangle_{\mathrm{HS}} := \sum_{i,j} \langle \mathcal{K} u_i, v_j \rangle_{H_2} \langle \mathcal{L} u_i, v_j \rangle_{H_2}, \qquad \|\mathcal{K}\|_{\mathrm{HS}} := \sqrt{\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle_{\mathrm{HS}}}.$$

Schliesslich bezeichnen wir $\mathcal{K}$ als Hilbert-Schmidt-Operator, falls $\|\mathcal{K}\|_{\mathrm{HS}} < \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{HS}}$ tatsächlich ein Skalarprodukt ist.

(b) Zeigen Sie, dass für zwei Hilbert-Schmidt-Operatoren $\mathcal{K}, \mathcal{L}: H_1 \to H_2$,

$$\langle \mathcal{K}, \mathcal{L} \rangle_{\mathrm{HS}} = \sum_j \langle \mathcal{K} u_j, \mathcal{L} u_j \rangle_{H_2}.$$

Aufgabe 3 (Singulärwertzerlegung II | 4 Punkte). Gegeben sei $D := (0, 1)$ und $f \in L^2(D \times D)$, wobei bekannt sei, dass

$$\kappa(x, y) := \int_D f(x, t) f(y, t) \, \mathrm{d}t = \cos\big(2\pi(x - y)\big).$$

(a) Zeigen Sie, dass der Integraloperator $\mathcal{K} : L^2(D) \to L^2(D)$, definiert durch

$$(\mathcal{K}u)(x) := \int_D \kappa(x, y) u(y) \, \mathrm{d}y,$$

symmetrisch, positiv semidefinit und kompakt ist.

(b) Zeigen Sie, dass jedes Eigenpaar (λ, u) von $\mathcal{K}$ zu einem Eigenwert $\lambda > 0$ der Beziehung

$$u'' + 4\pi^2 u = 0.$$

genügt.

(c) Bestimmen Sie eine mögliche Singulärwertzerlegung

$$f(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} u_j(x) v_j(t).$$

Hinweis. *Anhand der gegebenen Informationen können die Funktionen v_j nicht eindeutig bestimmt werden. Es reicht also, wenn Sie beliebige, orthonormale Funktionen angeben.*

Aufgabe 4 (Riesz-Basen | 4 Punkte). Es sei H separabler ein Hilbert-Raum und $\Psi = \{\psi_j\}_j$ eine Familie von Funktionen. Wir bezeichnen Ψ als *unbedingte Schauder-Basis*, falls jede Funktion $u \in H$ eine (unter Umordnungen invariante) Darstellung

$$u = \sum_j u_j \psi_j$$

besitzt. Wir bezeichnen Ψ als *Riesz-Basis*, falls zusätzlich Riesz-Konstanten $c, C > 0$ existieren, so dass

$$c\|u\|_H^2 \leq \sum_j |u_j|^2 \leq C\|u\|_H^2.$$

Zeigen Sie, dass Ψ genau dann eine Riesz-Basis ist, wenn eine Orthonormalbasis $\mathcal{E} = \{e_j\}_j$ und ein linearer Operator $\mathcal{T} : H \to H$ existieren, so dass $\|\mathcal{T}\|_{H \to H}, \|\mathcal{T}^{-1}\|_{H \to H} < \infty$ und $\mathcal{T} e_j = \psi_j$.