Übungsblatt 4.

Bearbeiten bis: **Montag, 24.03.2025, 10:00**

Aufgabe 1 (Tensorprodukt-Abschätzungen | 4 Punkte). Wir betrachten zwei Operatoren $\mathcal{K}: H_1 \to H_2$ und $\mathcal{L}: H_3 \to H_4$, wobei für $1 \le i \le 4$ die Räume $(H_i, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_i})$ Hilbert-Räume seien. Weiter seien die Operatoren $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$ stetig, das heisst, es existieren Konstanten $C_\mathcal{K}$ und $C_\mathcal{L}$, so dass

$$\|\mathcal{K}v\|_{H_2} \le C_\mathcal{K}\|v\|_{H_1}, \qquad \|\mathcal{L}w\|_{H_4} \le C_\mathcal{L}\|w\|_{H_3},$$

jeweils für alle $v \in H_1$ und $w \in H_3$. Offensichtlich folgt daraus, dass $\|(\mathcal{K}\otimes\mathcal{L})(v\otimes w)\|_{H_2\otimes H_4} \le C_\mathcal{K}C_\mathcal{L}\|v\otimes w\|_{H_1\otimes H_3}$.

(a) Wir betrachten eine Funktion der Form $u = \sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i$. Zeigen Sie, dass ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden darf, dass $(\mathcal{K}v_i)_i$ orthogonal in H_2 sind. Folgern Sie, dass

$$\|(\mathcal{K}\otimes\mathcal{L})u\|^2_{H_2\otimes H_4} \le C_\mathcal{L}^2 \left\|\sum_{i=1}^n \mathcal{K}v_i \otimes w_i\right\|^2_{H_2\otimes H_3}.$$

(b) Zeigen Sie, dass orthogonale Funktionen $(w_j')_j$ in H_3 und Koeffizienten $(c_{i,j})_{i,j}$ existieren, so dass $w_i = \sum_{j=1}^n c_{i,j} w_j'$. Folgern Sie, dass

$$\left\|\sum_{i=1}^n \mathcal{K}v_i \otimes w_i\right\|^2_{H_2\otimes H_3} \le C_\mathcal{K}^2 \sum_{j=1}^n \left\|\sum_{i=1}^n c_{i,j}v_i\right\|^2_{H_1} \|w_j'\|^2_{H_3}$$

und schliessen Sie, dass $\|(\mathcal{K}\otimes\mathcal{L})u\|_{H_2\otimes H_4} \le C_\mathcal{K}C_\mathcal{L}\|u\|_{H_1\otimes H_3}$.

(c) Zeigen Sie nun mittels Vervollständigung, dass $\|(\mathcal{K}\otimes\mathcal{L})u\|_{H_2\otimes H_4} \le C_\mathcal{K}C_\mathcal{L}\|u\|_{H_1\otimes H_3}$ für alle $u \in H_1 \otimes H_3$ gilt.

Aufgabe 2 (Singulärwertzerlegung | 4 Punkte). Betrachten Sie die Matrix

$$\mathbf{A} := \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}^\intercal \in \mathbb{R}^{4\times 2}.$$

(a) Berechnen Sie die normierten Eigenpaare $(\lambda_1, \mathbf{v}_1)$ und $(\lambda_2, \mathbf{v}_2)$ von $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$.

(b) Ergänzen Sie $\mathbf{u}_1 := \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\mathbf{A}\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{u}_2 := \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\mathbf{A}\mathbf{v}_2$ zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$.

(c) Geben Sie eine Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\intercal$ an.

Aufgabe 3 (Satz von Eckart-Young-Mirsky | 4 Punkte). Gegeben sei eine Funktion $f \in L^2(D_1 \times D_2)$ sowie für $M \in \mathbb{N}$ die Funktionen f_M der Form

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \cdot \phi_k \otimes \psi_k, \qquad f_M = \sum_{k=1}^{M} \sigma_k \cdot \phi_k \otimes \psi_k,$$

das heisst, f_M bezeichne die Funktion, welche durch das Abschneiden von f nach M Termen entstehe. Hierbei gelte $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq 0$ und $(\phi_k)_k$ und $(\psi_k)_k$ seien Orthonormalbasen des $L^2(D_1)$ bzw. des $L^2(D_2)$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\|f - f_M\|_{L^2(D_1 \times D_2)} = \left[\sum_{k=M+1}^{\infty} \sigma_k^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

(b) Wir definieren die Operatoren $\mathcal{A}, \mathcal{A}_M : L^2(D_2) \to L^2(D_1)$ durch

$$(\mathcal{A}u)(\mathbf{x}) := \int_{D_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \, \mathrm{d}\mathbf{y}, \qquad (\mathcal{A}_M u)(\mathbf{x}) := \int_{D_2} f_M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \, \mathrm{d}\mathbf{y}.$$

Zeigen Sie, dass sowohl $\mathcal{A}$ als auch $\mathcal{A}_M$ stetig sind.

(c) Zeigen Sie, dass $\|\mathcal{A} - \mathcal{A}_M\|_{L^2(D_2) \to L^2(D_1)} = \sigma_{M+1}$.

Aufgabe 4 (Approximation der Korrelation II | 4 Punkte). Wir betrachten die Korrelationsgleichung

$$\begin{cases} (\Delta \otimes \Delta) \operatorname{Cor}[u] = \operatorname{Cor}[f] & \text{in } D \times D, \\ u = 0 & \text{auf } \partial(D \times D). \end{cases}$$

Es sei $\operatorname{Cor}[f]_R = \sum_{i=1}^{R} v_i \otimes v_i$ eine Approximation, welche

$$\| \operatorname{Cor}[f] - \operatorname{Cor}[f]_R \|_{L^2(D \times D)} \lesssim \varepsilon$$

erfülle. Zeigen Sie, dass dann $\| \operatorname{Cor}[u] - \operatorname{Cor}[u]_R \|_{H^{(1,1)}_{0,\mathrm{mix}}(D \times D)} \lesssim \varepsilon$ gilt, wobei $\operatorname{Cor}[u]_R$ wie auf Blatt 2 berechnet werde.

Hinweis. *Benutzen Sie Blatt 3, Aufgabe 4 vom letzten Semester.*