Universität Basel

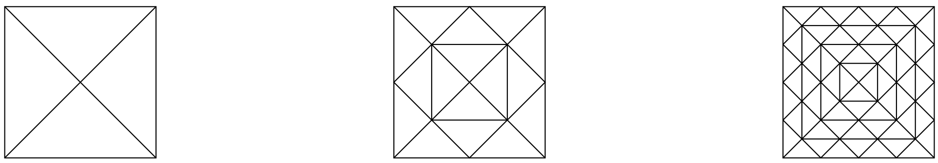
Hochdimensionale Approximationsmethoden FS 2025

Prof. Dr. H. Harbrecht

Übungsblatt 3.

Bearbeiten bis: **Montag, 17.03.2025, 10:00**

Aufgabe 1 (Hierarchische Basis | 4 Punkte). Sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Wir betrachten die Folge geschachtelter, quasi-uniformer Triangulationen in den Punkten $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset \Omega$, wobei jedes Dreieck in jedem Verfeinerungsschritt gemäss unten stehendem Muster in den Kantenmittelpunkten in vier Dreiecke unterteilt werde. Zusätzlich bezeichne $V_j := \operatorname{span}\{\phi_{j,k} : 1 \leq j \leq N_j\}$ den zugehörigen Ansatzraum stückweise linearer, nodaler Dreiecksfunktionen der Gitterweite $h_j \sim 2^{-j}$, das heisst, es gelte $\phi_{j,k}(\mathbf{x}_{j,\ell}) = \delta_{k,\ell}$. Der Einfachheit halber setzen wir zudem $X_{-1} := \emptyset$, $V_{-1} := \{0\}$ sowie $Y_j := \{k : \mathbf{x}_{j,k} \notin X_{j-1}\}$.



(a) Zeigen Sie, dass $B_J := \{\phi_{j,k} : 0 \leq j \leq J,\ k \in Y_j\}$ eine Basis von V_J ist.

(b) Es bezeichne $\mathcal{N}_{j-1}(\mathbf{x}) \subset X_{j-1}$ die Menge der Punkte, zu welchen von $\mathbf{x}$ in T_j eine Kante existiert. Zeigen Sie für die Interpolante $u_J \in V_J$ mittels vollständiger Induktion, dass

$$u_J(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{J} \sum_{k \in Y_j} c_{j,k}\phi_{j,k}(\mathbf{x}), \qquad c_{j,k} = u(\mathbf{x}_{j,k}) - \frac{u(\mathbf{x}_{j-1,a(k)}) + u(\mathbf{x}_{j-1,b(k)})}{2},$$

wobei jedes $\mathbf{x}_{j,k}$ auf der Kante zwischen $\mathbf{x}_{j-1,a(k)}$ und $\mathbf{x}_{j-1,b(k)}$ liege.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\left|c_{j,k}\right| \lesssim 2^{-2j}\|u\|_{C^2(\overline{\Omega})}.$$

Aufgabe 2 (Tensorprodukt-Approximation isotroper Funktionen II | 4 Punkte). Wie in Blatt 2, Aufgabe 2 betrachten wir zwei Gebiete $D_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ und $D_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$, welche mittels Finiter-Element-Räume $V_j^{(1)}$ und $V_j^{(2)}$ der Ordnungen p_1 und p_2 zu den Gitterweiten $h_j \sim 2^{-j}$ diskretisiert seien. Zeigen Sie, dass das Balancieren des Fehlers die bestmögliche Rate für die Tensorprodukt-Approximation einer Funktion isotroper Regularität liefert.

Aufgabe 3 (Kronecker-Produkt | 4 Punkte). Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ bezeichnen $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ das *Kronecker-Produkt* und $\operatorname{vec}(\mathbf{A})$ die Vektorizierung

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} := \begin{bmatrix} a_{1,1}\mathbf{B} & \cdots & a_{1,n}\mathbf{B} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}\mathbf{B} & \cdots & a_{m,n}\mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mk\times n\ell}, \qquad \operatorname{vec}(\mathbf{A}) := \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn},$$

wobei $\mathbf{a}_j$ die j-te Spalte von $\mathbf{A}$ bezeichne. Zeigen Sie, dass $\operatorname{vec}(\mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{A}^\intercal) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \operatorname{vec}(\mathbf{X})$ für alle $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$.

Aufgabe 4 (Kombinationstechnik | 4 Punkte). Wir betrachten die Tensorprodukt-Operatorgleichung

$$\begin{cases} (\Delta \otimes \Delta)u = f & \text{in } D \times D, \\ u = 0 & \text{auf } \partial(D \times D), \end{cases}$$

wobei wir u mithilfe der Kombinationstechnik approximieren wollen. Konkret betrachten wir auf D die geschachtelten, finite-Elemente-Räume $V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset H_0^1(D)$, bestehend aus stückweise linearen Funktionen. Weiter bezeichne $\mathrm{R}_j : H_0^1(D) \to V_j$ die Ritz-Projektion bezüglich der zum Laplace-Operator gehörigen Bilinearform und $\mathrm{R}_{j_1,j_2} : H_{0,\mathrm{mix}}^{(1,1)}(D \times D) \to V_{j_1} \otimes V_{j_2}$ die Ritz-Projektion bezüglich der Tensor-Produkt-Bilinearform

$$(a \otimes a)(u, v) := \iint_{D \times D} \big(\nabla \otimes \nabla\big)u : \big(\nabla \otimes \nabla\big)v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Für $\sigma \neq 0$ sei nun der Ansatzraum und die Approximante

$$\hat{V}_J^\sigma := \bigoplus_{j_1\sigma + j_2/\sigma \leq J} W_{j_1} \otimes W_{j_2}, \qquad \hat{u}_J^\sigma := \sum_{j_1\sigma + j_2/\sigma \leq J} \mathrm{D}_{j_1,j_2}^{\mathrm{R}} u$$

gegeben, wobei $\mathrm{D}_{j_1,j_2}^{\mathrm{R}} := \mathrm{R}_{j_1,j_2} - \mathrm{R}_{j_1-1,j_2} - \mathrm{R}_{j_1,j_2-1} + \mathrm{R}_{j_1-1,j_2-1}$.

(a) Zeigen Sie für $u = v \otimes w$, wobei $v, w \in H_0^1(D)$, dass

$$\left\| \mathrm{D}_{j_1,j_2}^{\mathrm{R}} u \right\|_{H_{\mathrm{mix}}^{(1,1)}(D \times D)} \lesssim 2^{-j_1-j_2} \|u\|_{H_{\mathrm{mix}}^{(2,2)}(D \times D)}. \tag{1}$$

(b) Schliessen Sie unter der Annahme, dass (??) für alle $u \in H_{0,\mathrm{mix}}^{(1,1)}(D \times D)$ gelte, dass

$$\|u - \hat{u}_J\|_{H_{\mathrm{mix}}^{(1,1)}(D \times D)} \lesssim \begin{cases} 2^{-J \min\{\sigma, 1/\sigma\}} \|u\|_{H_{\mathrm{mix}}^{(2,2)}(D \times D)}, & \text{falls } \sigma \neq 1, \\ \sqrt{J} 2^{-J} \|u\|_{H_{\mathrm{mix}}^{(2,2)}(D \times D)}, & \text{falls } \sigma = 1. \end{cases}$$