Übungsblatt 2.

Bearbeiten bis: **Montag, 03.03.2025, 10:00**

Aufgabe 1 (Approximation der Korrelation | 4 Punkte). Zu $D \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Korrelationsgleichung

$$\begin{cases} (\Delta \otimes \Delta)\operatorname{Cor}[u] = \operatorname{Cor}[f] & \text{in } D \times D, \\ \operatorname{Cor}[u] = 0 & \text{auf } \partial(D \times D). \end{cases}$$

(a) Es sei $\operatorname{Cor}[f] = \sum_{i=1}^R v_i \otimes v_i$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Cor}[u] = \sum_{i=1}^R u_i \otimes u_i$, wobei jedes u_i der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\Delta u_i = v_i & \text{in } D, \\ u_i = 0 & \text{auf } \partial D \end{cases}$$

genüge.

(b) Es seien $(\phi_j)_j$ nodale, stückweise lineare Finite-Element-Funktionen in $H_0^1(D)$, so dass

$$\operatorname{Cor}[u] \approx \sum_{j,k} u_{j,k}\phi_j \otimes \phi_k, \quad \operatorname{Cor}[f] \approx \sum_{j,k} f_{j,k}\phi_j \otimes \phi_k.$$

Weiter seien $\mathbf{M}$ und $\mathbf{A}$ die zugehörigen, symmetrischen Masse- und Steifigkeitsmatrizen. Zeigen Sie, dass das Galerkin-Problem äquivalent zum Gleichungssystem

$$\mathbf{AUA} = \mathbf{MFM}$$

ist, wobei $\mathbf{U} := [u_{j,k}]_{j,k}$ und $\mathbf{F} := [f_{j,k}]_{j,k}$.

Aufgabe 2 (Tensorprodukt-Approximation isotroper Funktionen | 4 Punkte). Wir betrachten zwei Gebiete $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ und $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$, welche mittels Finiter-Element-Räume $V_j^{(1)}$ und $V_j^{(2)}$ der Ordnungen p_1 und p_2 zu den Gitterweiten $h_j \sim 2^{-j}$ diskretisiert seien. Bezeichnet $\mathrm{P}_j^{(i)}$ die $L^2(\Omega_i)$-Projektion auf $V_j^{(i)}$, so gilt bekanntlich die Fehlerabschätzung

$$\left\| f - \left(\mathrm{P}_{j_1}^{(1)} \otimes \mathrm{P}_{j_2}^{(2)}\right) f \right\|_{L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)} \lesssim 2^{-\min\{j_1 p_1,\, j_2 p_2\}} \|f\|_{H_{\mathrm{mix}}^{p_1,0}(\Omega_1 \times \Omega_2) \cap H_{\mathrm{mix}}^{0,p_2}(\Omega_1 \times \Omega_2)},$$

wobei für diese Approximation $N \sim 2^{j_1 n_1 + j_2 n_2}$ Freiheitsgrade verwendet werden.

(a) Balancieren Sie den Fehler, indem Sie $j_1 := J$, $j_2 := J\frac{p_1}{p_2}$ wählen. Zeigen Sie, dass sich der Approximationsfehler verhält wie

$$N^{-\frac{p_1 p_2}{n_1 p_2 + n_2 p_1}}.$$

(b) Balancieren sie die Freiheitsgrade, indem Sie $j_1 := J$, $j_2 := J\frac{n_1}{n_2}$ wählen. Zeigen Sie, dass sich der Approximationsfehler verhält wie

$$N^{-\min\{\frac{p_1}{2n_1}, \frac{p_2}{2n_2}\}}.$$

(c) Welche Wahl ist besser für die Tensorprodukt-Approximation isotroper Funktionen?

Aufgabe 3 (Sobolev-Räume und Fourier-Reihen | 4 Punkte). Zu $u \in L^2((0,1)^n)$ betrachten wir die Fourier-Reihe

$$u(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \hat{u}(\mathbf{k})\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \qquad \hat{u}(\mathbf{k}) := \int_{(0,1)^n} u(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\|u\|^2_{L^2((0,1)^n)} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} |\hat{u}(\mathbf{k})|^2.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\partial_{x_j} u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} 2\pi \mathrm{i} k_j \hat{u}(\mathbf{k})\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \qquad u \in H^1_{\mathrm{per}}((0,1)^n).$$

(c) Schliessen Sie, dass

$$\|u\|^2_{H^s_{\mathrm{per}}(0,1)^n} \sim \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \left(1 + |\mathbf{k}|^{2s}\right)|\hat{u}(\mathbf{k})|^2.$$

Aufgabe 4 (Isotrope und gemischte Sobolev-Räume | 4 Punkte). Wir definieren $I := (0,1)$ und $\square := I \times I$. Zeigen Sie mithilfe der Fourier-Reihe die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} H^{(s_1,s_2)}_{\mathrm{mix,per}}(\square) &\simeq H^{s_1}_{\mathrm{per}}(I) \otimes H^{s_2}_{\mathrm{per}}(I), \\ H^{s}_{\mathrm{per}}(\square) &\simeq H^{s}_{\mathrm{per}}(I) \otimes L^2(I) \cap L^2(I) \otimes H^{s}_{\mathrm{per}}(I). \end{aligned}$$