



Übungsblatt 12.

Freiwillige Abgabe bis: Montag, 26.05.2025, 10:00

Aufgabe 1 (Kronecker-Produkt II | 4 Bonuspunkte). Für $1 \leq i \leq m$ seien $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen des Kronecker-Produkts:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \text{Rang} \left(\bigotimes_{i=1}^m A_i \right) = \prod_{i=1}^m \text{Rang } A_i, \\ (b) \quad & \text{Spur} \left(\bigotimes_{i=1}^m A_i \right) = \prod_{i=1}^m \text{Spur } A_i, \\ (c) \quad & \det \left(\bigotimes_{i=1}^m A_i \right) = \prod_{i=1}^m (\det A_i)^{s_i}, \quad s_i := \prod_{j \neq i} n_j. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Algebraisches Tensorprodukt | 4 Bonuspunkte). Wir betrachten die Folgenräume $\ell^1(\mathbb{N})$ und $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

- (a) Zeigen Sie, dass das algebraische Tensorprodukt $\ell^1(\mathbb{N}) \otimes \ell^1(\mathbb{N})$ dicht in $\ell^1(\mathbb{N}^2)$ ist.
- (b) Zeigen Sie, dass $\ell^1(\mathbb{N})' \simeq \ell^\infty(\mathbb{N})$ und $\ell^1(\mathbb{N}^2)' \simeq \ell^\infty(\mathbb{N}^2)$.
- (c) Zeigen Sie, dass das algebraische Tensorprodukt $\ell^\infty(\mathbb{N}) \otimes \ell^\infty(\mathbb{N})$ nicht dicht in $\ell^\infty(\mathbb{N}^2)$ ist.

Aufgabe 3 (Hadamard-Produkt | 4 Bonuspunkte). Für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ ist das Hadamard-Produkt definiert durch

$$A \odot B := [a_{i,j} b_{i,j}]_{i,j=1}^{k,\ell}.$$

- (a) Für $1 \leq i \leq m$ seien $A_i, B_i \in \mathbb{R}^{k_i \times \ell_i}$. Zeigen Sie, dass

$$\left(\bigotimes_{i=1}^m A_i \right) \odot \left(\bigotimes_{i=1}^m B_i \right) = \bigotimes_{i=1}^m A_i \odot B_i.$$

- (b) Welche Formel ist numerisch effizienter?

Aufgabe 4 (Kreuznormen | 4 Bonuspunkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$. Zeigen Sie für $p \in \{1, 2, \infty\}$, dass

$$\|A \otimes B\|_p := \sup_{\|v\|_p=1} \|(A \otimes B)v\|_p = \|A\|_p \|B\|_p.$$