Übungsblatt 11.

Bearbeiten bis: **Montag, 19.05.2025, 10:00**

Aufgabe 1 (Niedrigrangapproximation II | 4 Punkte). Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische und positiv semi-definite Matrix und $\mathbf{A}_m$ eine Niedrigrangapproximation

$$\mathbf{A}_m = \mathbf{L}\mathbf{L}^\intercal, \qquad \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die m von 0 verschiedenen Eigenwerte von $\mathbf{A}_m$ mit den Eigenwerten von $\mathbf{L}^\intercal\mathbf{L}$ übereinstimmen.

(b) Angenommen, die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{L}^\intercal$ seien bekannt. Geben Sie die zugehörigen Eigenvektoren von $\mathbf{A}_m$ an.

(c) Vergleichen Sie den Aufwand für die Berechnung nach obigem Schema mit der klassischen Singulärwertzerlegung von $\mathbf{A}_m$.

Aufgabe 2 (Tensor-Train-Implementierung | 4 Punkte). Gegeben sei eine Funktion $f \in L^2(D_1 \times \cdots \times D_m)$ mit TT-Approximation

$$f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) = \sum_{k_1=1}^{r_1} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{r_{m-1}} \phi_{k_1}^{(1)}(\mathbf{x}_1)\phi_{k_1,k_2}^{(2)}(\mathbf{x}_2) \cdots \phi_{k_{m-2},k_{m-1}}^{(m-1)}(\mathbf{x}_{m-1})\phi_{k_{m-1}}^{(m)}(\mathbf{x}_m).$$

Im Folgenden seien $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ beliebig, aber fest gewählt.

(a) Schreiben Sie $f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ als Produkt aus m Matrizen.

(b) Schreiben Sie $\alpha \cdot f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, als ein Produkt von m Matrizen, so dass die Matrizen mit möglichst wenigen Operationen berechnet werden können.

(c) Seien f, g gegeben durch TT-Approximationen gleicher Ränge in obigem Matrix-Format. Wie viele Additionen und Multiplikationen erfordert die Berechnung von $\alpha f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) + \beta g(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$?

(d) Wie lauten die Matrizen von $\alpha f + \beta g$?

Aufgabe 3 (Hierarchische Tucker-Zerlegung | 4 Punkte). Gegeben sei eine Funktion $f \in L^2(D_1 \times D_2 \times D_3 \times D_4)$.

(a) Zeigen Sie mithilfe der Singulärwertzerlegung, dass

$$f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)}}\phi_{k_1}^{(1,0)}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)\phi_{k_1}^{(1,1)}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3).$$

(b) Zeigen Sie, dass folgende Singulärwertzerlegungen existieren:

$$\left[\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)}}\phi_{k_1}^{(1,0)}(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1)\right]_{k_1=1}^{\infty} = \sum_{k_{2,0}=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_{k_{2,0}}^{(2,0)}}\phi_{k_{2,0}}^{(2,0)}(\mathbf{x}_0)\left[\psi_{k_1,k_{2,0}}^{(2,0)}(\mathbf{x}_1)\right]_{k_1=1}^{\infty},$$

$$\left[\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)}}\phi_{k_1}^{(1,0)}(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1)\right]_{k_1=1}^{\infty} = \sum_{k_{2,1}=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_{k_{2,1}}^{(2,1)}}\phi_{k_{2,1}}^{(2,1)}(\mathbf{x}_1)\left[\psi_{k_1,k_{2,1}}^{(2,1)}(\mathbf{x}_0)\right]_{k_1=1}^{\infty},$$

$$\left[\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)}}\phi_{k_1}^{(1,1)}(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)\right]_{k_1=1}^{\infty} = \sum_{k_{2,2}=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_{k_{2,2}}^{(2,2)}}\phi_{k_{2,2}}^{(2,2)}(\mathbf{x}_2)\left[\psi_{k_1,k_{2,2}}^{(2,2)}(\mathbf{x}_3)\right]_{k_1=1}^{\infty},$$

$$\left[\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)}}\phi_{k_1}^{(1,1)}(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)\right]_{k_1=1}^{\infty} = \sum_{k_{2,3}=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_{k_{2,3}}^{(2,3)}}\phi_{k_{2,3}}^{(2,3)}(\mathbf{x}_3)\left[\psi_{k_1,k_{2,3}}^{(2,3)}(\mathbf{x}_2)\right]_{k_1=1}^{\infty}.$$

(c) Schliessen Sie, dass

$$f = \sum_{k_1=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_{k_1}^{(1)}}\sum_{k_{2,0},\ldots k_{2,3}=1}^{\infty}\beta_{k_1,k_{2,0},k_{2,1}}^{(1,0)}\beta_{k_1,k_{2,2},k_{2,3}}^{(1,1)}\phi_{k_{2,0}^{(2,0)}}\otimes\phi_{k_{2,1}^{(2,1)}}\otimes\phi_{k_{2,2}^{(2,2)}}\otimes\phi_{k_{2,3}^{(2,3)}}.$$

Wie lauten die Koeffizienten $\beta_{k_1,k_{2,0},k_{2,1}}^{(1,0)}$ und $\beta_{k_1,k_{2,2},k_{2,3}}^{(1,1)}$?

Aufgabe 4 (Matrixzerlegungen | 4 Punkte). Sei $\mathbf{A} := \bigotimes_{j=1}^{m}\mathbf{A}_j$. Angenommen, es existieren eine Zerlegungen der Form

$$\mathbf{A}_j = \begin{cases}\mathbf{Q}_j\mathbf{R}_j, & \text{oder}\\ \mathbf{L}_j\mathbf{L}_j^{\intercal}, & \text{oder}\\ \mathbf{U}_j\Sigma_j\mathbf{V}_j^{\intercal}.\end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass dann $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, $\mathbf{A} = \mathbf{LL}^{\intercal}$ oder $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^{\intercal}$ gilt, wobei jeweils $\mathbf{Z} = \bigotimes_{j=1}^{m}\mathbf{Z}_j$, $\mathbf{Z} \in \{\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{L}, \Sigma, \mathbf{V}\}$.

(b) Zeigen Sie ferner, dass in diesem Falle die Kronecker-Produkt-Matrizen den Anforderungen an eine QR-, Cholesky- oder Singulärwertzerlegung erfüllen.