Übungsblatt 10.

Bearbeiten bis: **Montag, 12.05.2025, 10:00**

Aufgabe 1 (Reverse Tensor-Train I | 4 Punkte). Für $i = 1, 2, 3$ seien $D_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ und $f \in L^2(D_1 \times D_2 \times D_3)$ mit TT-Zerlegung

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \sum_{k_1,k_2=1}^{\infty} \phi^{(1)}_{k_1}(\mathbf{x}_1)\phi^{(2)}_{k_1,k_2}(\mathbf{x}_2)\phi^{(3)}_{k_2}(\mathbf{x}_3).$$

Wenden wir den Algorithmus zur TT-Zerlegung rückwärts an, finden wir eine Darstellung

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \sum_{k_2,k_3=1}^{\infty} \theta^{(1)}_{k_2}(\mathbf{x}_1)\theta^{(2)}_{k_2,k_3}(\mathbf{x}_2)\theta^{(3)}_{k_3}(\mathbf{x}_3).$$

Zeigen Sie, dass die hierbei gefundenen Funktionen bis auf Skalierung übereinstimmen.

Hinweis. *Im ersten Schritt der Rückwärtszerlegung betrachten Sie den Operator $\mathcal{A} : L^2(D_3) \to L^2(D_3)$, definiert durch den Kern*

$$\alpha(\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3) := \int_{D_1}\int_{D_2} f(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{x}_3) f(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{y}_3)\,\mathrm{d}\mathbf{z}_2\,\mathrm{d}\mathbf{z}_1.$$

Wie sehen die Eigenfunktionen dieses Operators aus?

Aufgabe 2 (Reverse Tensor-Train II | 4 Punkte). Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass sich das Resultat aus Aufgabe 1 auch auf den m-variaten Fall übertragen lässt.

Aufgabe 3 (Projektionslemma | 4 Punkte). Es sei H ein Hilbert-Raum und für $i = 1, 2$ seien $V_i \subset H$ lineare Unterräume. Weiter seien $\mathrm{P}_i : H \to V_i$ die orthogonalen Projektoren auf V_i.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\|u - \mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_2\,u\|_H^2 \leq \|u - \mathrm{P}_1\,u\|_H^2 + \|u - \mathrm{P}_2\,u\|_H^2.$$

(b) Nutzen Sie dieses Resultat, um einen alternativen Beweis zu Satz 5.1 herzuleiten.

Aufgabe 4 (Produktoperatoren | 4 Punkte). Auf dem Einheitsintervall $I := [0, 1]$ betrachten wir stückweise lineare, nodale Basisfunktionen ϕ_k zu den Punkten $x_k = kh$, $k = 0, \ldots, N$, wobei $h := \frac{1}{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass der Laplace-Operator auf dem Einheitsquadrat $\square := I \times I$ durch die Matrix

$$\mathbf{L} := \mathbf{A} \otimes \mathbf{M} + \mathbf{M} \otimes \mathbf{A}$$

ausgedrückt wird, wobei $\mathbf{M}$ und $\mathbf{A}$ die eindimensionalen Masse- und Steifigkeitsmatrizen definieren.

(b) Folgern Sie, dass $\Delta \otimes \Delta$ auf $\square \times \square$ durch $\mathbf{L} \otimes \mathbf{L}$ beschrieben werden kann. Berechnen Sie $\mathbf{L} \otimes \mathbf{L}$ und schliessen Sie, dass auch $\Delta \otimes \Delta$ eine Summe von Produktoperatoren ist.

(c) Es sei u eine Funktion gegeben durch

$$u = \sum_{m=1}^{r} \phi_m \otimes \chi_m \otimes \psi_m \otimes \omega_m,$$

wobei ϕ_m, χ_m, ψ_m und ω_m Finite-Elemente-Funktionen auf I seien. Wie gross ist der Tensorrang von $(\Delta \otimes \Delta)u$ maximal?