Übungsblatt 1.

Bearbeiten bis: **Montag, 24.02.2025, 10:00**

Aufgabe 1 (Algebraisches Tensorprodukt | 4 Punkte). Seien X, Y Banach-Räume über $\mathbb{R}$ mit zugehörigen Dualräumen X' und Y'. Für $n \in \mathbb{N}$ fassen wir den formalen Ausdruck $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ als linearen Operator $A : X' \to Y$, gegeben durch

$$A\phi = \sum_{i=1}^n \phi(x_i) y_i, \quad \phi \in X'$$

auf, wobei $x_i \in X$ und $y_i \in Y$. Wir setzen

$$\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \sim \sum_{j=1}^m a_j \otimes b_j,$$

falls diese beiden Ausdrücken den gleichen Operator definieren und die Menge aller Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$ als $X \otimes Y$. Bezüglich der Operationen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i + \sum_{i=n+1}^m x_i \otimes y_i &:= \sum_{i=1}^m x_i \otimes y, \\ \alpha \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i &:= \sum_{i=1}^n (\alpha x_i) \otimes y \end{aligned}$$

ist $X \otimes Y$ ein Vektorraum, welchen wir als *algebraisches Tensorprodukt* bezeichnen.

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} x \otimes (y + y') &= x \otimes y + x \otimes y', \\ (\alpha x) \otimes y &= x \otimes (\alpha y), \\ x \otimes 0 &= 0 \otimes 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Mix-Räume | 4 Punkte). Für $\mathbf{s} := (s_1, s_2) \in \mathbb{N}_0^2$ definieren wir den gemischten Sobolev-Raum

$$H^{\mathbf{s}}_{\text{mix}}(D_1 \times D_2) := \Big\{ u : D_1 \times D_2 \to \mathbb{R} : \\ \partial_{\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\alpha}} \partial_{\mathbf{y}}^{\boldsymbol{\beta}} u \in L^2(D_1 \times D_2) \text{ für alle } |\boldsymbol{\alpha}| \le s_1, |\boldsymbol{\beta}| \le s_2 \Big\}$$

mit der Norm

$$\|u\|_{H^{\mathbf{s}}_{\text{mix}}(D_1 \times D_2)} := \left[\sum_{|\alpha| \le s_1, |\beta| \le s_2} \left\| \partial_{\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\alpha}} \partial_{\mathbf{y}}^{\boldsymbol{\beta}} u \right\|^2_{L^2(D_1 \times D_2)} \right]^{\frac{1}{2}},$$

wobei $D_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$, $D_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ zwei Gebiete seien. Zeigen Sie, dass

$$H^{s_1+s_2}(D_1 \times D_2) \subset H^{\mathbf{s}}_{\text{mix}}(D_1 \times D_2) \subset H^{\min\{s_1, s_2\}}(D_1 \times D_2).$$

Aufgabe 3 (Mix-Räume II | 4 Punkte). Für zwei reelle Hilbert-Räume $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_1})$ und $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_2})$ ist der Tensorproduktraum $H_1 \otimes H_2$ definiert als Vervollständigung des algebraischen Tensorprodukts bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle u_1 \otimes u_2, v_1 \otimes v_2 \rangle_{H_1 \otimes H_2} := \langle u_1, v_1 \rangle_{H_1} \langle u_2, v_2 \rangle_{H_2}.$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass

$$H^{\mathbf{s}}_{\text{mix}}(D_1 \times D_2) \simeq H^{s_1}(D_1) \otimes H^{s_2}(D_2),$$

wobei $D_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}, D_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ zwei Gebiete seien.

(a) Betrachten Sie Funktion der Form $u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n v_i(\mathbf{x}) w_i(\mathbf{y})$, wobei $v_i \in H^{s_1}(D_1)$ und $w_i \in H^{s_2}(D_2)$. Zeigen Sie, dass

$$\|u\|_{H^{\mathbf{s}}_{\text{mix}}(D_1 \times D_2)} = \left\| \sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i \right\|_{H^{s_1}(D_1) \otimes H^{s_2}(D_2)}.$$

(b) Benutzen Sie die Dichtheit der univariaten Polynome in $H^{s_i}(D_i)$ und die Dichtheit der bivariaten Polynome in $H^{\mathbf{s}}_{\text{mix}}(D_1 \times D_2)$, um die Behauptung zu zeigen.

Aufgabe 4 (Momentgleichung | 4 Punkte). Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $D \subset \mathbb{R}^d$. Für eine Funktion $u : D \times \Omega \to \mathbb{R}$, definieren wir den Erwartungswert und die Zwei-Punkt-Korrelation der Zufallsgrössen $u(\mathbf{x}, \cdot)$ als

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[u](\mathbf{x}) &:= \int_\Omega u(\mathbf{x}, \omega) \, \mathrm{d}P(\omega), && \mathbf{x} \in D, \\ \mathrm{Cor}[u](\mathbf{x}, \mathbf{y}) &:= \int_\Omega u(\mathbf{x}, \omega) \cdot u(\mathbf{y}, \omega) \, \mathrm{d}P(\omega), && \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D. \end{aligned}$$

Für $\omega \in \Omega$ betrachten wir die stochastische, partielle Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbf{x}} u(\omega) = f(\cdot, \omega) & \text{in } D, \\ \quad u(\omega) = 0 & \text{auf } \partial D, \end{cases}$$

wobei fast sicher $f(\cdot, \omega) \in H^{-1}(D)$ gelte.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{cases} -\Delta \, \mathrm{E}[u] = \mathrm{E}[f] & \text{in } D, \\ \quad \mathrm{E}[u] = 0 & \text{auf } \partial D. \end{cases}$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\begin{cases} (\Delta \otimes \Delta) \, \mathrm{Cor}[u] := \Delta_{\mathbf{x}} \Delta_{\mathbf{y}} \, \mathrm{Cor}[u] = \mathrm{Cor}[f] & \text{in } D \times D, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathrm{Cor}[u] = 0 & \text{auf } \partial(D \times D). \end{cases}$$