

Projekt.

zu bearbeiten bis: **Dienstag, 31.07.2018**

Problemstellung

In diesem Projekt betrachten wir das Bernoullische freie Randproblem. Gegeben seien ein Gebiet $T \subset \mathbb{R}^2$ mit einem *freien Rand* $\partial T = \Gamma$ und ein Gebiet $S \subset T$ mit einem *fixen Rand* $\partial S = \Sigma$, vergleiche Figur 1. Wir setzen $\Omega = T \setminus \bar{S}$ und suchen für eine gegebene Konstante $g > 0$ nun dasjenige Gebiet Ω und die dazugehörige Funktion u , welche das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= 1 && \text{auf } \Sigma, \\ -\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= g, u = 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \tag{1}$$

erfüllen.

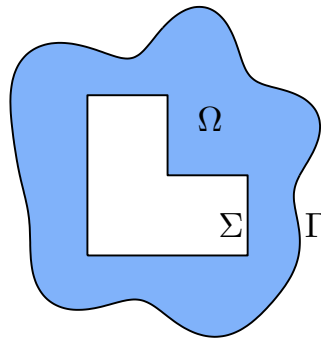


Abbildung 1: Das Gebiet Ω und seine Ränder Γ and Σ .

Wir bestimmen die Lösung des freien Randproblems (1) mit einem Ansatz aus der Formoptimierung. Das gesuchte Gebiet Ω minimiert das Dirichlet-Energiefunktional

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} \{ \|\nabla u\|^2 + g^2 \} d\mathbf{x} \rightarrow \min \tag{2}$$

unter den Nebenbedingungen $\Delta u = 0$ in Ω , $u = 1$ auf Σ , $u = 0$ in Γ .

Um das Funktional J zu minimieren, benötigen wir dessen *Formableitung*. Definieren wir für ein hinreichend glattes Verschiebungsfeld $\mathbf{U} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$ das *gestörte Gebiet* Ω_{ε} gemäß

$$\Omega_{\varepsilon} := \{ \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{U}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \Omega \},$$

dann erhalten wir die Formableitung wie üblich per Grenzwert

$$\delta J(\Omega)[\mathbf{U}] := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(\Omega_{\varepsilon}) - J(\Omega)}{\varepsilon}.$$

Für das Formfunktion J in (2) ergibt sich

$$\delta J(\Omega)[\mathbf{U}] = \int_{\Gamma} \langle \mathbf{U}, \mathbf{n} \rangle \{ g^2 - \|\nabla u\|^2 \} d\sigma.$$

Wir sehen, dass die Formableitung nur vom Verschiebungsfeld $\mathbf{U}$ am Rand abhängt. Insbesondere gilt $\delta J(\Omega^*)[\mathbf{U}] = 0$ für alle $\mathbf{U}$ im Minimum Ω^* von (2), was

$$g^2 - \|\nabla u\|^2 = g^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)^2 = 0$$

impliziert. Da auf Ω^* aufgrund des Maximumprinzips u positiv ist, gilt $\partial u / \partial \mathbf{n} < 0$ auf Γ^* und es folgt die gewünschte Randbedingung $-\partial u / \partial \mathbf{n} = g$.

Numerische Approximation

Unter der Annahme, dass das gesuchte Gebiet sternförmig ist, können wir es durch eine parametrisierte Kurve der Form

$$\gamma : [0, 2\pi) \rightarrow \Gamma, \quad \gamma(\phi) = r(\phi) \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix}$$

beschreiben. Dabei sei r eine endliche Fourier-Reihe,

$$r(\phi) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es bezeichne im folgenden

$$\mathbf{r} = [b_n, \dots, b_1, a_0, a_1, \dots, a_n]^\top$$

den Vektor der Fourier-Koeffizienten von r .

Algorithmus 1 Gradientenverfahren

Input: Fourier-Koeffizienten $\mathbf{r}_{\text{alt}}$
Output: Fourier-Koeffizienten $\mathbf{r}_{\text{neu}}$
for $i = 1, 2, \dots$ **do**
 berechne $\mathbf{d} = -\delta J(\Omega_{r_{\text{alt}}})[\boldsymbol{\psi}]$
 setze $s = s_0$ und $\mathbf{r}_{\text{neu}} = \mathbf{r}_{\text{alt}} + s\mathbf{d}$
 while $J(\Omega_{r_{\text{neu}}}) > J(\Omega_{r_{\text{alt}}}) - s/2 \|\mathbf{d}\|^2$ **do**
 setze $s = s/2$ und $\mathbf{r}_{\text{neu}} = \mathbf{r}_{\text{alt}} + s\mathbf{d}$
 end while
 setze $\mathbf{r}_{\text{alt}} = \mathbf{r}_{\text{neu}}$
end for

Um die Lösung von (2) zu approximieren, benutzen wir das Gradientenverfahren mit Armijo-Schrittweitensteuerung aus Algorithmus 1. Die Abstiegsrichtung $\mathbf{d}$ enthält die Updates der Fourier-Koeffizienten und ergibt sich aus der Anwendung der Formableitung auf die Basisfunktionen $\boldsymbol{\psi}_\ell$ von γ . Diese sind gegeben durch

$$\boldsymbol{\psi}_\ell(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} \sin((n - \ell + 1)\phi), & 1 \leq \ell \leq n, \\ \cos((\ell - n - 1)\phi), & n + 1 \leq \ell \leq 2n + 1, \end{cases}$$

das heisst, es ist

$$\mathbf{d} = -[\delta J(\Omega)[\boldsymbol{\psi}_\ell]]_{\ell=1}^n.$$

Setzen wir zur Approximation von u stückweise lineare Finite Elemente an, so ist

$$\delta J(\Omega)[\boldsymbol{\psi}_\ell] = \int_{\Gamma} \langle \boldsymbol{\psi}_\ell, \mathbf{n} \rangle \{g^2 - \|\nabla u\|^2\} d\sigma \approx \sum_{\mathbf{e}} \int_{\mathbf{e}} \langle \boldsymbol{\psi}_\ell, \mathbf{n} \rangle \{g^2 - \|\nabla u_h\|^2\} d\sigma,$$

wobei $\mathbf{e} = \mathbf{E} - \mathbf{S}$ eine durch einen Startknoten $\mathbf{S}$ und einen Endknoten $\mathbf{E}$ gegebene Dreieckskante auf Γ bezeichnet. Um die einzelnen Randintegrale zu berechnen, greifen

wir auf die Mittelpunktsregel zurück. Bezeichnen $\phi_{\mathbf{S}}$ und $\phi_{\mathbf{E}}$ die Winkel von $\mathbf{S}$ und $\mathbf{E}$, so erhalten wir

$$\int_e \langle \psi_\ell, \mathbf{n} \rangle \{g^2 - \|\nabla u_h\|^2\} d\sigma = \left\langle \psi_\ell \left(\frac{\phi_{\mathbf{S}} + \phi_{\mathbf{E}}}{2} \right), \mathbf{n} \right\rangle \{g^2 - \|\nabla u_h\|^2\} \|\mathbf{e}\|.$$

Die nach aussen gerichtete Einheitsnormale zu $\mathbf{e}$ ist gegeben durch

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\|\mathbf{e}\|} \begin{bmatrix} e_2 \\ -e_1 \end{bmatrix}.$$

Das zu $\mathbf{e}$ gehörige Dreieck $T_{\mathbf{e}}$ sei durch die Knoten $\mathbf{P}_1 = (x_1, y_1)$, $\mathbf{P}_2 = (x_2, y_2)$ und $\mathbf{P}_3 = (x_3, y_3)$ gegeben. Die zugehörigen Knotenwerte der Finite-Element-Lösung seien u_{i_1} , u_{i_2} , und u_{i_3} . Für den Gradienten auf dem Dreieck gilt dann

$$\nabla u_h = u_{i_1} \mathbf{B}_{T_{\mathbf{e}}}^{-\top} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + u_{i_2} \mathbf{B}_{T_{\mathbf{e}}}^{-\top} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_{i_3} \mathbf{B}_{T_{\mathbf{e}}}^{-\top} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{mit } \mathbf{B}_{T_{\mathbf{e}}} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}.$$

Netzgenerierung

Für das freie Randproblem ist das Gebiet Ω wie folgend vorgegeben: Zuerst definieren wir das L-shape (siehe Abbildung 2) mit den Eckpunkten

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 &= \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \quad \mathbf{L}_2 = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right), \quad \mathbf{L}_3 = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \\ \mathbf{L}_4 &= \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \quad \mathbf{L}_5 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \quad \mathbf{L}_6 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \\ \mathbf{L}_7 &= \left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right), \quad \mathbf{L}_8 = \left(\frac{3}{8}, -\frac{1}{8}\right), \quad \mathbf{L}_9 = \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right), \\ \mathbf{L}_{10} &= \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right), \quad \mathbf{L}_{11} = \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right), \quad \mathbf{L}_{12} = \left(-\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right). \end{aligned}$$

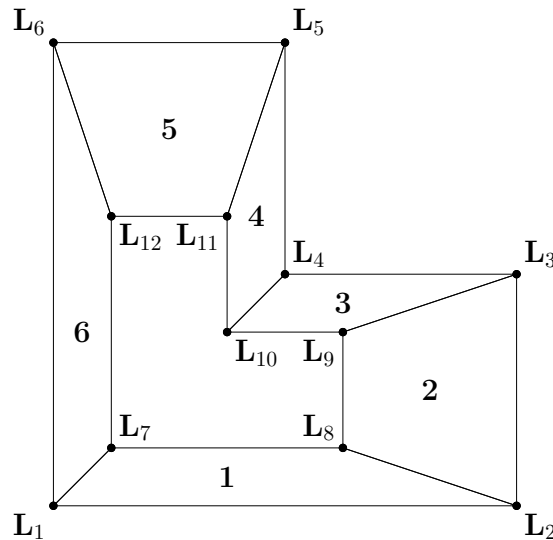


Abbildung 2: Das L-shape unterteilt in Patches 1–6.

Das L-shape ist unterteilt in sechs Patches, die eine bessere Verfeinerung des dazugehörigen Gitters ermöglichen. Haben wir nun eine Randkurve γ gegeben, erhalten wir das

Gebiet Ω mithilfe der sogenannten *Coons-Patches*. Dazu definieren wir auf jedem Patch die Kurven

$$\begin{aligned} c_{i,1}(t) &= \gamma(w_i + t \cdot (w_{i+1} - w_i)), \\ c_{i,2}(t) &= \gamma(w_i) + t \cdot (\mathbf{L}_{i+6} - \gamma(w_i)), \\ c_{i,3}(t) &= \mathbf{L}_{i+6} + t \cdot (\mathbf{L}_{i+7} - \mathbf{L}_{i+6}), \\ c_{i,4}(t) &= \gamma(w_{i+1}) + t \cdot (\mathbf{L}_{i+7} - \gamma(w_{i+1})), \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{w} = \left[\frac{5\pi}{4}, \arctan\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi, \arctan\left(\frac{1}{3}\right), \frac{\pi}{4}, \arctan(3), \arctan(-3) + \pi \right]$$

und für $s, t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \ell_{i,1}(s, t) &= (1 - t) \cdot c_{i,1}(s) + t \cdot c_{i,3}(s), \\ \ell_{i,2}(s, t) &= (1 - s) \cdot c_{i,2}(t) + s \cdot c_{i,4}(t), \\ b_i(s, t) &= c_{i,1}(0) \cdot (1 - s)(1 - t) + c_{i,1}(1) \cdot s(1 - t) \\ &\quad + c_{i,3}(0) \cdot (1 - s)t + c_{i,3}(1) \cdot st, \\ C_i(s, t) &= \ell_{i,1}(s, t) + \ell_{i,2}(s, t) - b_i(s, t). \end{aligned}$$

Die durch die Funktion $C_i(s, t)$ paramterisierte Fläche ist das Coons-Patch zum i -ten Patch des L-shapes. Mit einer geeigneten Transformation auf das Einheitsquadrat kann man nun das L-shape in ein beliebiges Gebiet Ω transformieren.

Der Vektor $\mathbf{w}$ enthält die Phasenwinkel der Punkte $\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_6$ und dient der Berechnung der Funktion γ auf den Rändern der Patches. Befinden wir uns allerdings auf dem zweiten Patch, müssen wir $w_2 = \arctan(-1/3)$ setzen, um einen Sprung im Phasenwinkel zu vermeiden.

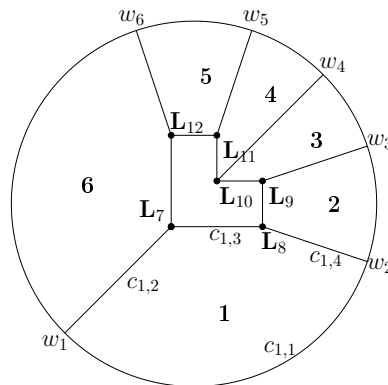


Abbildung 3: Das Gebiet Ω unterteilt in Patches 1–6. Hier ist Γ der Einheitskreis.

Aufgabe 1.

Zunächst befassen wir uns mit der Generierung eines Gitter für das Gebiet Ω . Laden Sie dafür die Funktion `[P,F,Bc] = L_shape` von der Website herunter. Sie generiert eine Punkte- und eine Elementliste sowie Randbedingungen für das L-shape (siehe Abbildung 2). Beachten Sie, dass in `Bc` die Punkte auf dem inneren Rand Σ den Wert 3 haben.

- Ändern Sie Ihre Funktion `refine` aus den Übungen so ab, dass sie Vierecksgitter verfeinern kann. Ein Viereck soll dabei in vier kleinere Vierecke zerteilt werden, deren Eckpunkte die Seitenhalbierenden und der Schwerpunkt des ursprünglichen

Vierecks bilden. Ausserdem müssen die Randbedingungen richtig übergeben werden. Schreiben Sie auch eine Funktion `square2triangle`, welche ein Vierecksgitter in ein Dreiecksgitter umwandelt.

Visualisieren Sie das L-shape auf Level 5.

- b) Schreiben Sie eine Funktion `patch2coons`, welche die Punkte aus dem L-shape auf das Gebiet Ω abbildet. Gehen Sie dabei für jedes Patch einzeln vor.

Zuerst müssen für jeden Punkt $\mathbf{P}$ eines Patches i dessen Koordinaten (s, t) auf dem Einheitsquadrat bestimmt werden, wobei der Eckpunkt $\mathbf{L}_i$ auf den Eckpunkt $(0, 0)$ im Einheitsquadrat geschickt werden soll. Da das L-shape auf $(0, 0)$ zentriert ist, lässt sich dies bewerkstelligen, indem Sie zuerst den Schnittpunkt $\mathbf{S}$ der Geraden $\overline{\mathbf{OP}}$ mit dem inneren Rand Σ berechnen. Mit den Strahlensätzen lassen sich dann leicht die Seitenverhältnisse s und t berechnen (siehe Abbildung 4), welche gerade den Koordinaten auf dem Einheitsquadrat entsprechen.

Vom Einheitsquadrat aus lassen sich die Punkte mit dem Coons-Patch $C_i(s, t)$ dann auf Ω transformieren.

Visualisieren Sie das Gitter für das Gebiet Ω mit dem Einheitskreis als Rand Γ ($\mathbf{r} = a_0 = 1$) auf Level 5.

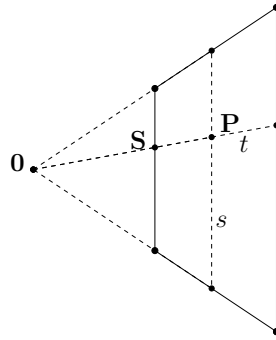


Abbildung 4: Skizze zur Berechnung der Koordinaten auf dem Einheitsquadrat, hier auf dem zweiten Patch.

Aufgabe 2.

In dieser Aufgabe werden wir uns mit dem Poisson-Problem mit inhomogenen Randbedingungen aus (2) vertraut machen. Um u mit Finiten Elementen zu approximieren, spalten wir es auf in

$$u_h = u_{0,h} + g_h$$

mit $g_h|_{\Sigma} = 1$ und $g_h = 0$ sonst sowie $u_{0,h} = 0$ auf $\Gamma \cup \Sigma$. Machen wir wie gewohnt den Ansatz $u_h = \sum_i u_i \varphi_i$, so ergibt sich beim Aufstellen des linearen Gleichungssystems

$$\int_{\Omega} \sum_i u_i \langle \nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j \rangle d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \sum_{i \in \mathcal{I}_{\Omega}} u_i \langle \nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j \rangle d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \sum_{i \in \mathcal{I}_{\Sigma}} 1 \cdot \langle \nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j \rangle d\mathbf{x} = 0,$$

wobei $\mathcal{I}_{\Omega} = \{i : \text{der Knoten } \mathbf{x}_i \text{ ist in } \Omega \setminus \Sigma\}$ und $\mathcal{I}_{\Sigma} = \{i : \text{der Knoten } \mathbf{x}_i \text{ liegt auf } \Sigma\}$. Um das Poisson-Problem zu lösen, spalten wir also die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{S}$ auf in einen Teil $\mathbf{S}_{\Omega, \Omega}$, der mit den Knoten in $\mathcal{I}_{\Omega}$ assoziiert ist, und einen Teil $\mathbf{S}_{\Omega, \Sigma}$, der mit den Knoten in $\mathcal{I}_{\Sigma}$ assoziiert ist. Dies ergibt das Gleichungssystem

$$\mathbf{S}_{\Omega, \Omega} \mathbf{u}_{\Omega} = -\mathbf{S}_{\Omega, \Sigma} \mathbf{u}_{\Sigma},$$

wobei $\mathbf{u}_\Sigma = \mathbf{1}$ die Koeffizienten u_i in $\mathcal{I}_\Sigma$ und $\mathbf{u}_\Omega$ die Koeffizienten in $\mathcal{I}_\Omega$ enthält.
 Lösen Sie das Poisson-Problem mit den inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen aus (2). Dabei sei Γ der Einheitskreis ($\mathbf{r} = a_0 = 1$). Visualisieren Sie die Lösung auf Level 5.

Aufgabe 3.

- a) Schreiben Sie eine Funktion

```
[d_r_new,P_new] = gradient_descent(...),
```

welche das Bernoullische freie Randproblem mit Hilfe des Gradientenverfahrens löst. Die Fourier-Koeffizienten der Randkurve γ sowie die Punkteliste des Gebiets Ω sollen dabei in **d_r_new** und **P_new** ausgegeben werden.

- b) Seien Γ der Einheitskreis, ausgedrückt durch die Fourier-Koeffizienten $a_0 = 1$ und $a_k, b_k = 0$ für alle $k = 1, \dots, 20$, und $g = 3, 5, 7, 9$. Visualisieren Sie die Lösung des Randproblems nach 450, 200, 110 und 70 Schritten des Gradientenverfahrens auf Level 6.

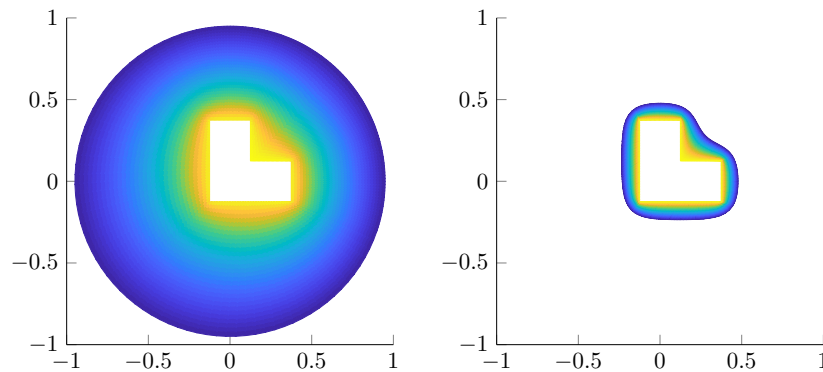


Abbildung 5: Die Lösungen zu den Aufgaben 2 (links) und 3 (rechts).