Übungsblatt 8.

Abgabe bis: **Freitag, 04.05.2018, 12:00**

Aufgabe 1 (Gegenbeispiele | 4 Punkte).

Sei $\{\mathbf{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset U$ eine Folge in einem Banach-Raum U.

(a) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen aus $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| \to 0$ die Konvergenz von $\mathbf{x}_k$ *nicht* folgt.

(b) Zeigen Sie, dass die Aussage von (a) auch gilt, wenn angenommen wird, dass die Folge $\{\mathbf{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

Hinweis. *Man kann sich auf den Fall $U = \mathbb{R}$ beschränken.*

Aufgabe 2 (Grenzrichtungen | 4 Punkte).

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe, abgeschlossene Menge und $\mathbf{x} \in K$. Ein $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, mit $\|\mathbf{d}\|_2 = 1$, heisst *Grenzrichtung* von $\mathbf{x}$ in K, wenn es eine Folge $\{\mathbf{y}_k\} \subset K \setminus \{\mathbf{x}\}$ gibt, so dass

$$\mathbf{y}_k \to \mathbf{x} \quad \text{und} \quad \frac{\mathbf{y}_k - \mathbf{x}}{\|\mathbf{y}_k - \mathbf{x}\|_2} \to \mathbf{d}$$

erfüllt sind. Sei $G_K(\mathbf{x})$ die Menge aller Grenzrichtung von $\mathbf{x}$ in K.

(a) Zeigen Sie $G_K(\mathbf{x}) \subset T_K(\mathbf{x})$.

(b) Zeigen Sie $G_K(\mathbf{x}) \supset T_K(\mathbf{x}) \cap \big\{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \,:\, \|\mathbf{d}\|_2 = 1\big\}$.

Aufgabe 3 (Grenztangenten | 4 Punkte).

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe, abgeschlossene Menge und $\mathbf{x} \in K$. Für jedes $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $\varphi_{\mathbf{y}} \colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ und $\psi_{\mathbf{y}} \colon [0,1] \to K$ durch

$$\varphi_{\mathbf{y}}(t) := t\mathbf{y} + (1-t)\mathbf{x} \quad \text{und} \quad \psi_{\mathbf{y}}(t) := P_K\big(\varphi_{\mathbf{y}}(t)\big).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\psi_{\mathbf{y}}$ für $\mathbf{y} \in \mathbf{x} + T_K(\mathbf{x})$ bei 0 in Richtung 1 richtungsdifferenzierbar ist, mit

$$\delta\psi_{\mathbf{y}}(0)[1] = \delta\varphi_{\mathbf{y}}(0)[1].$$

Schliessen Sie, dass $T_K(\mathbf{x}) = \big\{\delta\psi_{\mathbf{y}}(0)[1] \,:\, \mathbf{y} \in \mathbf{x} + T_K(\mathbf{x})\big\}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\psi_{\mathbf{y}}$ für $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ bei 0 in Richtung 1 richtungsdifferenzierbar ist, mit

$$\delta\psi_{\mathbf{y}}(0)[1] = P_{T_K(\mathbf{x})}\big(\delta\varphi_{\mathbf{y}}(0)[1]\big),$$

was sogar $T_K(\mathbf{x}) = \big\{\delta\psi_{\mathbf{y}}(0)[1] \,:\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n\big\}$ ergibt.

Aufgabe 4 (Unstetigkeiten projizierter, stetiger Vektorfelder | 4 Punkte).

Seien $\mathbf{V} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$ und $K = \big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1} \text{ eintragsweise}\big\}$.

(a) Berechnen Sie $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ und $P_{T_K(\mathbf{x})}\big(\mathbf{V}(\mathbf{x})\big)$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbf{e}_2 + [0,1]\mathbf{e}_1$.

(b) Berechnen Sie $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ und $P_{T_K(\mathbf{x})}\big(\mathbf{V}(\mathbf{x})\big)$ für alle $\mathbf{x} \in [0,1]\mathbf{1}$.

(c) Schliessen Sie, dass $\mathbf{x} \mapsto P_{T_K(\mathbf{x})}\big(\mathbf{V}(\mathbf{x})\big)$ bei $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ nicht stetig ist.