Übungsblatt 7.

Abgabe bis: **Freitag, 27.04.2018, 12:00**

Aufgabe 1 (adjungierte Operatoren in Banach-Räumen | 4 Punkte)**.**

Seien U, V reelle Banach-Räume und $A \in \mathcal{B}(U; V)$. Dann definiert man den *adjungierten Operator* $A^\mathsf{T} \in \mathcal{B}(V'; U')$ als

$$\begin{aligned} A^\mathsf{T} \colon V' &\to U' \\ f &\mapsto f \circ A. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass A^T wohldefiniert ist, d.h. dass $A^\mathsf{T} \in \mathcal{B}(V'; U')$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass diese Definition mit der der Vorlesung übereinstimmt, wenn U, V reelle Hilbert-Räume sind, wobei U' und V' mit U und V identifiziert werden.

(c) Sei W ein zusätzlicher, reeller Banach-Raum und $B \in \mathcal{B}(V; W)$. Zeigen Sie,

$$(B \circ A)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} \circ B^\mathsf{T}.$$

(d) Sei A zusätzlich invertierbar. Zeigen Sie dann, dass A^T ebenfalls invertierbar ist mit

$$(A^{-1})^\mathsf{T} = (A^\mathsf{T})^{-1}.$$

Aufgabe 2 (adjungierter Zustand über adjungierte Operatoren | 8 Punkte)**.**

Seien U, H reelle Hilbert-Räume, wobei wir U' und H' mit U und H identifizieren, sowie V ein reeller Hilbert-Raum, wobei wir V'' mit V identifizieren. Seien weiter $E \in \mathcal{B}(V; H)$ und $F \in \mathcal{B}(U; V')$, sowie $a \colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine stetige, elliptische Bilinearform.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} A \colon V &\to V' \\ y &\mapsto [v \mapsto a(y, v)] \end{aligned}$$

einen invertierbaren Operator $A \in \mathcal{B}(V; V')$ definiert. Zeigen Sie ebenfalls, dass der zu A adjungierte Operator durch

$$\begin{aligned} A^\mathsf{T} \colon V &\to V' \\ v &\mapsto [y \mapsto a(y, v)] \end{aligned}$$

gegeben ist.

(b) Sei $y_d \in H$ und $\lambda \geq 0$. Betrachten Sie die Aufgabe

$$\left.\begin{aligned} \text{minimiere } J(y, u) = \frac{1}{2}\|Ey - y_d\|_H^2 + \frac{\lambda}{2}\|u\|_U^2 \\ \text{unter der Nebenbedingung } a(y, v) = \langle Fu, v\rangle_{V',V} \text{ für alle } v \in V. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Schliessen Sie, dass bei einem lokalen Optimum $(y^\star, u^\star)$

$$\Big(F^\mathsf{T} \circ (A^\mathsf{T})^{-1} \circ E^\mathsf{T}\big(E \circ A^{-1} \circ F(u^\star) - y_d\big) + \lambda u^\star, h\Big)_U = 0$$

für alle $h \in U$ gilt.

(c) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-glattem Rand Γ, $y_d \in L^2(\Gamma)$ und $\lambda \geq 0$. Bringen Sie die Aufgabe

$$\left.\begin{aligned} \text{minimiere } J(y,u) &= \frac{1}{2}\int_\Gamma |y - y_d|^2 \,\mathrm{d}\sigma + \frac{\lambda}{2}\int_\Gamma |u|^2 \,\mathrm{d}\sigma \\ \text{unter den Nebenbedingungen } &-\Delta\, y + y = 0 \text{ in } \Omega,\ \langle \nabla\, y, \mathbf{n}\rangle = u \text{ auf } \Gamma. \end{aligned}\right\}$$

in die Form der Aufgabe (1). Geben Sie dazu auch explizit die Operatoren E, F und A an und bestimmen Sie ebenfalls die Adjungierten dieser.

Hinweis. *Für $f \in V'$ und $v \in V$ bezeichnet $\langle f, v\rangle_{V',V} := f(v)$. Diese Notation, die sich an deren eines Skalarproduktes anlehnt, wird* duality pairing *genannt.*

Aufgabe 3 (konvexe Hüllen und Kegelhüllen | 4 Punkte)**.**

Sei B ein Banach-Raum. Eine Menge $C \subset B$ heisst *Kegel*, falls $x \in C$ für jedes $t \geq 0$ auch $tx \in C$ impliziert. Ist der Kegel $C \subset B$ ebenfalls konvex, so heisst C *konvexer Kegel*. Sei $X \subset B$ eine beliebige Menge.

(a) Zeigen Sie, dass es eine minimale konvexe Menge $\operatorname{conv}(X)$, die *konvexe Hülle* von X, mit $X \subset \operatorname{conv}(X)$ gibt. D.h. es gilt dann für jede konvexe Menge K', dass aus $X \subset K'$ gleich auch $\operatorname{conv}(X) \subset K'$ folgt.

(b) Zeigen Sie, dass es einen minimalen Kegel $\operatorname{cone}(X)$, die *Kegelhülle* von X, mit $X \subset \operatorname{cone}(X)$ gibt. D.h. es gilt dann für jeden Kegel C', dass aus $X \subset C'$ gleich auch $\operatorname{cone}(X) \subset C'$ folgt.

(c) Zeigen Sie, dass $\operatorname{conv}\big(\operatorname{cone}(X)\big) = \operatorname{cone}\big(\operatorname{conv}(X)\big)$ gilt, und schliessen Sie, dass aus X konvex direkt $\operatorname{cone}(X)$ konvex folgt.