Universität Basel

Prof. Dr. H. Harbrecht

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

Frühjahrsemester 2018

Übungsblatt 5.

Abgabe bis: **Freitag, 13.04.2018, 12:00**

Aufgabe 1 (orthogonale Projektion bei Box-Beschränkungen | 4 Punkte)**.**

Sei U ein Hilbert-Raum und $V \subset U$ eine beschränkte, konvexe und abgeschlossene Menge, mit $V \neq \emptyset$. Dann ist die *orthogonale Projektion auf* V, $P_V \colon U \to V$, definiert als

$$P_V(u) := \operatorname*{arg\,min}_{v \in V} \|u - v\|.$$

(a) Beweisen Sie, dass P_V wohldefiniert ist.

(b) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, $U = L^2(\Omega)$ und $u_a, u_b \in L^2(\Omega)$ mit $u_a < u_b$ fast überall, sowie

$$V = \{u \in U \,:\, u_a \leq u \leq u_b \text{ fast überall}\}.$$

Zeigen Sie dann, dass für ein beliebiges $u \in U$ gilt:

$$P_V(u)(\mathbf{x}) = P_{[u_a(\mathbf{x}), u_b(\mathbf{x})]}\big(u(\mathbf{x})\big) \text{ fast überall.}$$

Aufgabe 2 (Robin-Randsteuerung und formales Lagrange-Prinzip | 8 Punkte)**.**

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-glattem Rand Γ, $\lambda \geq 0$, $y_d \in L^2(\Omega)$ und $u_a, u_b \in L^2(\Gamma)$ mit $u_a < u_b$ fast überall. Betrachten Sie die folgende randgesteuerte Aufgabe

$$\left.\begin{array}{c} \text{minimiere } J(y,u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |y - y_d|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \dfrac{\lambda}{2}\displaystyle\int_\Gamma |u|^2 \,\mathrm{d}\sigma \\ \text{unter den Nebenbedingungen } \Delta y = 0 \text{ in } \Omega,\ \langle \nabla y, \mathbf{n}\rangle + y = u \text{ auf } \Gamma \\ \text{und } u_a \leq u \leq u_b \text{ fast überall.} \end{array}\right\}$$

(a) Vollführen Sie die Herleitung der schwachen Formulierung der Zustandsgleichung

$$\Delta y = 0 \text{ in } \Omega, \quad \langle \nabla y, \mathbf{n}\rangle + y = u \text{ auf } \Gamma.$$

(b) Schliessen Sie, dass diese für alle $u \in L^2(\Gamma)$ eindeutig lösbar ist und der dazugehörige Steuerungs-Zustands-Operator $S \colon L^2(\Gamma) \to L^2(\Omega)$ linear und beschränkt ist.

Hinweis. *Benutzen Sie die auf $H^1(\Omega)$ vorhandene Norm-Äquivalenz, die in der Aufgabe 2 des Übungsblattes 3 des letzten Semesters gezeigt wurde.*

(c) Benutzen Sie das formale Lagrange-Prinzip, um die adjungierte Gleichung herzuleiten.

(d) Beweisen Sie, dass es sich bei der in (c) formal gefundenen adjungierten Gleichung tatsächlich um die adjungierte Gleichung handelt, deren Lösungsoperator also mit S^T übereinstimmt.

Aufgabe* **3** (formales Lagrange-Prinzip bei Dirichlet-Randsteuerung[1] | 4 Punkte)**.**

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-glattem Rand Γ, $\lambda \geq 0$, $y_d \in L^2(\Omega)$. Betrachten Sie die folgende randgesteuerte Aufgabe

$$\left.\begin{aligned} &\text{minimiere } J(y,u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |y - y_d|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{\lambda}{2}\int_\Gamma |u|^2 \,\mathrm{d}\sigma \\ &\text{unter den Nebenbedingungen } \Delta\, y = 0 \text{ in } \Omega,\ y = u \text{ auf } \Gamma. \end{aligned}\right\}$$

(a) Vollführen Sie die Herleitung der schwachen Formulierung der Zustandsgleichung

$$\Delta\, y = 0 \text{ in } \Omega, \quad y = u \text{ auf } \Gamma.$$

(b) Benutzen Sie das formale Lagrange-Prinzip, um die adjungierte Gleichung herzuleiten.

Hinweis. *Sie dürfen hier schon bei der schwachen Formulierung rein formal arbeiten.*
Beachten Sie, dass die inhomogenen Dirichlet-Randdaten nicht in die Gleichung einfliessen, die durch Testen, Integrieren und Umformen aus $\Delta\, y = 0$ *entsteht, sondern einfach durch eigenständiges Testen eine zweite Gleichung liefern.*
Beachten Sie auch beim Aufstellen des Lagrange-Funktionales, dass Sie dann beide dieser Gleichungen ankoppeln müssen.

[1] Der Stern * kennzeichnet, dass die Aufgabe als Bonusaufgabe zu verstehen ist. Die nachfolgende Punktangabe geht somit nicht in die Maximalpunktzahl (100%) für die Scheinkriterien ein; von Ihnen erreichte Punkte werden aber in Ihrer Punktzahlsumme berücksichtigt.