Übungsblatt 4.

Abgabe bis: **Freitag, 06.04.2018, 12:00**

Aufgabe 1 (einige Differentiale in Banach-Räumen | 5 Punkte).

Seien U ein reeller Banach-Raum, $f \in \mathcal{B}(U;\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ und $g \in \mathcal{L}(U;\mathbb{R}) \setminus \mathcal{B}(U;\mathbb{R})$. Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die Richtungsableitung an der Stelle 0 für alle Richtungen $v \in U$. Überprüfen Sie jeweils zudem, ob die Funktion selber an der Stelle 0 stetig ist, ob ihre Richtungsableitungen an der Stelle 0 homogen sind, ob ihre Richtungsableitungen an der Stelle 0 eine lineare Abbildung ergeben, ob sie an der Stelle 0 Gâteaux-differenzierbar ist, ob sie an der Stelle 0 Fréchet-differenzierbar ist?

$$\begin{aligned} e&\colon U \to \mathbb{R},\, u \mapsto \|u\| \\ a&\colon U \to \mathbb{R},\, u \mapsto [f(u)]^3\|u\|^{-2}, 0 \mapsto 0 \\ s&\colon U \to \mathbb{R},\, u \mapsto g(u) \\ t&\colon U \to \mathbb{R},\, u \mapsto [g(u)]^2 \\ r&\colon U \to U,\, u \mapsto e^{-[g(u)]^2}u \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Differentiale von Hilbert-Raum-Normen | 5 Punkte).

Sei H ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ und Norm $\|\cdot\|$. Wir definieren

$$f\colon H \to \mathbb{R},\, u \mapsto \|u\|, \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto x^2 \quad \text{und} \quad h := g \circ f\colon H \to \mathbb{R},\, u \mapsto \|u\|^2.$$

(a) Berechnen Sie $\delta f(u)[v]$ für alle $u, v \in H$. Schliessen Sie, dass f nur an der Stelle $0 \in H$ nicht Gâteaux-differenzierbar ist.

(b) Berechnen Sie $\delta g(x)[y]$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Schliessen Sie, dass g überall Fréchet-differenzierbar ist.

(c) Berechnen Sie mit der Kettenregel $\delta h(u)[v]$ für alle $u, v \in H$. Schliessen Sie, dass h überall Fréchet-differenzierbar ist.

Aufgabe 3 (Differentiale von Funktionenraumfunktionalen | 4 Punkte).

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet. Für welche $p \in [1,\infty]$ sind die Funktionale

$$F(u) := \int_\Omega u(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}, \quad G(u) := \int_\Omega |u(\mathbf{x})|\,\mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \text{und} \quad H(u) := \int_\Omega \|\mathbf{x}\|[u(\mathbf{x})]^3\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

für alle $u \in L^p(\Omega)$ definiert? Für welche $p \in [1,\infty]$ sind sie jeweils von $L^p(\Omega)$ nach $\mathbb{R}$ Fréchet-differenzierbar, und wie lauten diese Ableitungen?

Aufgabe 4 (Differentiale in Banach-Räumen | 2 Punkte).

Seien $U, V, \tilde{U}, \tilde{V}$ reelle Banach-Räume, mit den Einbettungen $\tilde{U} \hookrightarrow U$ und $V \hookrightarrow \tilde{V}$, und $f\colon U \to V$. Sei f an einer Stelle $u \in U$ richtungsdifferenzierbar in eine Richtung $v \in U$ bzw. Gâteaux-differenzierbar bzw. Fréchet-differenzierbar. Zeigen Sie, dass diese Eigenschaft jeweils erhalten bleibt, wenn man U mit $\tilde{U}$ und V mit $\tilde{V}$ ersetzt.