Übungsblatt 3.

Abgabe bis: **Freitag, 23.03.2018, 12:00**

Aufgabe 1 (schwach-starke Folgenstetigkeit | 4 Punkte).

Seien U, V reelle Banach-Räume und $A \in \mathcal{B}(U; V)$ ein folgenkompakter Operator, d.h. für jede beschränkte Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ besitzt die Folge $\{Au_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ eine konvergente Teilfolge.

(a) Seien $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in V und $v \in V$, so dass jede Teilfolge von v_n eine Teilteilfolge besitzt, die gegen v konvergiert. Zeigen Sie, dass dann v_n gegen v konvergiert.

(b) Sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in U, welche schwach gegen $u \in U$ konvergiert. Zeigen Sie, dass die Folge $\{Au_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ gegen Au konvergiert.

Aufgabe 2 (endlich-dimensionale Steuerung | 6 Punkte).

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-glattem Rand Γ, $\lambda \geq 0$ sowie $y_d \in L^2(\Omega)$ und $f_i \in L^2(\Omega)$ für $i = 1, \ldots, n$. Betrachten Sie die folgende endlich-dimensionale Optimalsteuerungsaufgabe

$$\left.\begin{aligned} \text{minimiere } J(y, \mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_\Omega |y - y_d|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega \left|\sum_{i=1}^n u_i f_i\right|^2 \mathrm{d}\mathbf{x} \\ \text{unter den Nebenbedingungen } -\Delta\, y = \sum_{i=1}^n u_i f_i \text{ in } \Omega,\ y = 0 \text{ auf } \Gamma \\ \text{und } \mathbf{u} \in \overline{B_1(\mathbf{0})}. \end{aligned}\right\}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Aufgabe eine optimale Steuerung $\mathbf{u}^\star \in \mathbb{R}^n$ besitzt.

(b) Wann ist diese optimale Steuerung eindeutig?

Aufgabe 3 (Randsteuerung | 6 Punkte).

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-glattem Rand Γ, $\lambda \geq 0$, $y_d \in L^2(\Omega)$ und $u_a, u_b \in L^2(\Gamma)$. Betrachten Sie die folgende randgesteuerte Optimalsteuerungsaufgabe

$$\left.\begin{aligned} \text{minimiere } J(y, u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |y - y_d|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{\lambda}{2}\int_\Gamma |u|^2 \,\mathrm{d}\sigma \\ \text{unter den Nebenbedingungen } -\Delta\, y + y = 0 \text{ in } \Omega,\ \langle \nabla\, y, \mathbf{n}\rangle = u \text{ auf } \Gamma \\ \text{und } u_a \leq u \leq u_b \text{ fast überall.} \end{aligned}\right\}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Aufgabe eine optimale Steuerung $u^\star \in L^2(\Gamma)$ besitzt.

(b) Gilt (a) auch noch dann, wenn die Nebenbedingung

$$-\Delta\, y + y = 0$$

durch

$$-\Delta\, y + y = f,$$

mit einem $f \in L^2(\Omega)$, ersetzt wird?