Übungsblatt 2.

Abgabe bis: **Freitag, 16.03.2018, 12:00**

Aufgabe 1 (schwache Konvergenz I | 4 Punkte).

Sei U ein reeller Banach-Raum. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Der schwache Grenzwert einer schwach konvergenten Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eindeutig: $u_n \rightharpoonup u$ und $u_n \rightharpoonup v$ impliziert $u = v$.

(b) Eine (stark) konvergente Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist auch schwach konvergent, wobei starker und schwacher Grenzwert übereinstimmen: $u_n \to u$ impliziert $u_n \rightharpoonup u$.

(c) Wenn U zusätzlich endlich-dimensional ist, dann ist eine schwach konvergente Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auch (stark) konvergent: $u_n \rightharpoonup u$ impliziert $u_n \to u$.

Aufgabe 2 (schwache Konvergenz II | 4 Punkte).

Seien U, V reelle Banach-Räume. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Folge in U mit schwachem Grenzwert u und $A \in \mathcal{B}(U;V)$. Dann gilt $Au_n \rightharpoonup Au$.

(b) Sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Folge in U mit schwachem Grenzwert u und $A \in \mathcal{L}(U;V) \setminus \mathcal{B}(U;V)$. Dann gilt $Au_n \rightharpoonup Au$.

(c) Sei $u \in U$ und $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Folge in $\mathcal{B}(U;V)$ mit schwachem Grenzwert A. Dann gilt $A_n u \rightharpoonup Au$.

Aufgabe 3 (schwache Konvergenz III | 4 Punkte).

Seien H ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in H und $u, v \in H$.

(a) Widerlegen Sie: Aus $u_n \rightharpoonup u$ und $v_n \rightharpoonup v$ folgt $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v)$.

(b) Beweisen Sie: Aus $u_n \rightharpoonup u$ und $v_n \to v$ folgt $(u_n, v_n) \to (u, v)$.

Aufgabe 4 (schwache Konvergenz IV | 4 Punkte).

Seien U, V reelle Banach-Räume, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in U, $u \in U$, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{B}(U;V)$ und $A \in \mathcal{B}(U;V)$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Aus $u_n \rightharpoonup u$ und $A_n \to A$ folgt $A_n u_n \rightharpoonup Au$.

(b) Aus $u_n \to u$ und $A_n \rightharpoonup A$ folgt $A_n u_n \rightharpoonup Au$.

Hinweis. *Die Aussage, dass schwach konvergente Folgen beschränkt sind, dürfen Sie auf diesem Blatt ohne Beweis benutzen.*
$\mathcal{L}(U;V)$ bezeichnet den Vektorraum aller linearen Abbildungen von U nach V, $\mathcal{B}(U;V)$ den Banach-Raum aller beschränkten, linearen Abbildungen von U nach V.