Übungsblatt X.

Abgabe bis: **Freitag, 25.05.2018, 12:00**

Aufgabe 1 (Newton-Differential | 4 Punkte)**.**

Seien X, Y, Z reelle Banach-Räume. Eine Funktion $F\colon X \to Y$ heisst *Newton-differenzierbar* bei $x \in X$, wenn eine offene Umgebung $U_x \subset X$ von x und eine Abbildung $\mathrm{D}_{N,x} F\colon U_x \to \mathcal{B}(X;Y)$ exisiert mit

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\big\|F(x+h) - F(x) - \mathrm{D}_{N,x} F(x+h)[h]\big\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

(a) Sei $F\colon X \to Y$ Fréchet-differenzierbar bei x. Zeigen Sie, dass F Newton-differenzierbar bei x ist und dass ein $\mathrm{D}_{N,x} F$ gewählt werden kann welches auf U_x beschränkt ist.

(b) Sei $F\colon X \to Y$ Newton-differenzierbar bei x, wobei $\mathrm{D}_{N,x} F$ auf U_x beschränkt sei. Zeigen Sie, dass F stetig bei x ist.

(c) Sei $F\colon X \to Y$ Newton-differenzierbar bei x, wobei $\mathrm{D}_{N,x} F$ auf $U_x \subset X$ beschränkt sei. Sei weiter $G\colon Y \to Z$ Newton-differenzierbar bei $F(x)$, wobei $\mathrm{D}_{N,F(x)} G$ auf $U_{F(x)} \subset Y$ beschränkt sei. Zeigen Sie, dass $G \circ F$ Newton-differenzierbar bei x ist, mit der Wahl von

$$\mathrm{D}_{N,x}(G \circ F)(y)[h] = \mathrm{D}_{N,F(x)}\, G\big(F(y)\big)\big[\mathrm{D}_{N,x} F(y)[h]\big].$$

Aufgabe 2 (NCP-Funktionen | 4 Punkte)**.**

Eine Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *NCP-Funktion*[1], wenn für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi(a,b) = 0 \quad \text{genau dann, wenn} \quad a \geq 0,\ b \geq 0 \text{ und } ab = 0.$$

(a) Seien $c, k > 0$ beliebig. Zeigen Sie, φ ist genau dann eine NCP-Funktion, wenn $\psi(a,b) := \varphi(ca, kb)$ eine NCP-Funktion ist.

(b) Zeigen Sie, $\varphi(a,b) := \min\{a,b\}$ ist eine NCP-Funktion.

(c) Sei $c > 0$ beliebig. Schliessen Sie, $\varphi(a,b) := a - \max\{0, a - cb\}$ ist eine NCP-Funktion.

(d) Zeigen Sie, $\varphi(a,b) := \sqrt{a^2 + b^2} - (a+b)$ ist eine NCP-Funktion.

Aufgabe 3 (Fréchet-Differential der Determinante | 4 Punkte)**.**

Zeigen Sie, dass das Fréchet-Differential der Determinante $\det\colon \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}$ durch

$$\mathrm{D}\det(\mathbf{M})[\mathbf{N}] = \sum_{j=1}^{d} \det\big(\mathbf{M}_{[j,\mathbf{N}]}\big)$$

gegeben ist. Dabei bezeichnet $\mathbf{M}_{[j,\mathbf{N}]}$ diejenige Matrix, die aus $\mathbf{M}$ hervorgeht, wenn man ihre j-te Spalte durch die j-te Spalte der Matrix $\mathbf{N}$ ersetzt.

[1] NCP steht für *nonlinear complementarity problem*.

Aufgabe 4 (Linearisierung der Determinante bei $\mathbf{I}$ | 4 Punkte)**.**

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine beliebige Matrix.

(a) Zeigen Sie, dass für $\varepsilon \to 0$

$$\det(\mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{A}) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + o(\varepsilon)$$

gilt.

(b) Stärken Sie vorheriges Resultat zu: Für $\varepsilon \to 0$ gilt

$$\det(\mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{A}) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Hinweis. tr *bezeichnet hier die Spurabbildung. Aufgabe 3 sowie Kettenregel betrachten.*