

# Integralgleichungen und Randelemente

Skript zur Vorlesung  
im  
Frühjahrssemester 2020

Helmut Harbrecht

Stand: 25. Mai 2020

# Vorwort

Diese Mitschrift kann und soll nicht ganz den Wortlaut der Vorlesung wiedergeben. Sie soll das Nacharbeiten des Inhalts der Vorlesung erleichtern. Hilfreich, aber nicht notwendig, zum Verstehen der Vorlesung sind Kenntnisse aus der Numerischen Mathematik, wie man sie beispielsweise in folgenden Büchern findet:

- M. Hanke-Bourgeois: *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*, Teubner-Verlag
- R. Schaback und H. Wendland: *Numerische Mathematik*, Springer-Verlag
- J. Stoer und R. Bulirsch: *Numerische Mathematik I+II*, Springer-Verlag

## Literatur zur Vorlesung:

- O. Steinbach: *Numerische Näherungsverfahren für elliptische Randwertprobleme: Finite Elemente und Randelemente*, Teubner-Verlag
- S. Sauter und C. Schwab: *Randelementmethoden: Analyse, Numerik und Implementierung schneller Algorithmen*, Teubner-Verlag

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>6</b>
2.1	Die Räume $C^k(\Omega)$ , $C^{k,\alpha}(\Omega)$ und $L^p(\Omega)$	6
2.2	Verallgemeinerte Ableitung und Sobolev-Räume	8
2.3	Distributionen und Sobolev-Räume	11
2.4	Sobolev-Räume auf Mannigfaltigkeiten	16
2.5	Spuroperator	17
<b>3</b>	<b>Schwache Formulierung von Randwertproblemen</b>	<b>19</b>
3.1	Dirichlet-Problem	19
3.2	Neumann-Problem	23
<b>4</b>	<b>Fundamentallösung</b>	<b>24</b>
<b>5</b>	<b>Randintegraloperatoren</b>	<b>28</b>
5.1	Newton-Potential	28
5.2	Einfachschichtpotential und Einfachschichtoperator	33
5.3	Adjungierter Doppelschichtoperator	35
5.4	Doppelschichtpotential und Doppelschichtoperator	38
5.5	Hypersingulärer Operator	41
<b>6</b>	<b>Abbildungseigenschaften der Integraloperatoren</b>	<b>46</b>
6.1	Calderón-Projektor	46
6.2	Elliptizität des Einfachschichtoperators	47
6.3	Dirichlet-zu-Neumann-Abbildung	51
6.4	Kontraktionseigenschaft des Doppelschichtoperators	51
<b>7</b>	<b>Randintegralgleichungen</b>	<b>55</b>
7.1	Dirichlet-Problem	55
7.2	Neumann-Problem	56
7.3	Über Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art	58
7.4	Randintegralgleichungen im Außenraum	59
7.5	Zusammenfassung	59
<b>8</b>	<b>Randelemente</b>	<b>62</b>
8.1	Vernetzung	62
8.2	Stückweise konstante Ansatzfunktionen	63
8.3	Stückweise lineare Ansatzfunktionen	67

8.4	Dirichlet-zu-Neumann-Abbildung . . . . .	68
8.5	Neumann-zu-Dirichlet-Abbildung . . . . .	72
8.6	Rechentechnische Betrachtungen . . . . .	74
<b>9</b>	<b>Schnelle Randelementmethoden</b>	<b>77</b>
9.1	Niedrigrangapproximation . . . . .	77
9.2	Clusterbaum . . . . .	78
9.3	Partition der Systemmatrix . . . . .	79
9.4	Kernentwicklung . . . . .	81
9.5	Aufwand . . . . .	82
<b>10</b>	<b>Kopplung von FEM und BEM</b>	<b>83</b>
10.1	Herleitung . . . . .	83
10.2	Variationsformulierung . . . . .	84
10.3	Diskretisierung . . . . .	86

---

# 1. Einleitung

Neben der Finite-Elemente-Methode (FEM) spielt zur numerischen Lösung von Problemen aus der Festkörper- und Strömungsmechanik sowie der Wärmelehre die Randelementmethode (BEM, nach der englischen Bezeichnung *boundary element method*) eine wichtige Rolle.

Die Finite-Elemente-Methode basiert auf der Variationsformulierung und ist allgemein für lineare, nichtlineare und auch zeitabhängige Probleme anwendbar. Dabei treten folgende Nachteile auf:

1. Das ganze Gebiet  $\Omega$  muss diskretisiert werden.
2. Für unbeschränkte Gebiete  $\Omega$  werden künstliche Randbedingungen gebraucht, die einen zusätzlichen Fehler produzieren.
3. Die Genauigkeit bei der Bestimmung der Ableitungen der Lösung (Kräfte, Spannungen, Flüsse, etc.) ist deutlich niedriger als bei der Lösung selbst.

Bei der Randelementmethode wird aus einer partiellen Differentialgleichung in  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  unter Verwendung einer Fundamentallösung und der Randbedingung zunächst eine Randintegralgleichung auf der  $(d - 1)$ -dimensionalen Oberfläche  $\Gamma := \partial\Omega$  konstruiert. Anschließend wird die Integralgleichung in eine Variationsformulierung überführt und vermittle der Randelementmethode gelöst. Dabei entspricht die Randelementmethode im wesentlichen einer Finite-Elemente-Methode auf der Oberfläche. Dieses Vorgehen besitzt die folgenden Vorteile:

1. Das Problem wird um eine Raumdimension reduziert, wodurch die Diskretisierung wesentlich einfacher wird, speziell im Fall von Außenraumproblemen.
2. Die Fehlerordnung bei der Berechnung von Ableitungen ist genauso groß wie bei der Berechnung der Lösung.
3. Es besteht die Möglichkeit, die Lösung nur in einigen ausgewählten Punkten oder Bereichen auszurechnen.
4. Die Randelementmethode bietet eine natürliche Behandlung von Randsingularitäten wie zum Beispiel Rissen.

Neben diesen Vorteilen hat die Randelementmethode aber auch den Nachteil, dass sie nur bei konstanten Koeffizienten anwendbar ist, da ansonsten die Fundamentallösung nicht explizit bekannt ist.

## 2. Grundlagen

### 2.1 Die Räume $C^k(\Omega)$ , $C^{k,\alpha}(\Omega)$ und $L^p(\Omega)$

**Definition 2.1** Für  $d \in \mathbb{N}$  heißt der Vektor  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d)$ ,  $\beta_i \in \mathbb{N}_0$ , **Multiindex** mit dem **Betrag**  $|\boldsymbol{\beta}| = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_d$  und der **Fakultät**  $\boldsymbol{\beta}! = \beta_1! \beta_2! \dots \beta_d!$ .

Für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  ist  $\mathbf{x}^\beta = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_d^{\beta_d}$ , und für eine hinreichend oft differenzierbare Funktion  $u$  kann die Berechnung partieller Ableitungen geschrieben werden als

$$\partial^\beta u(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\beta_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\beta_2} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_d} \right)^{\beta_d} u(x_1, x_2, \dots, x_d).$$

**Definition 2.2** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein beschränktes Gebiet und  $k \in \mathbb{N}_0$ , dann bezeichnet  $\mathbf{C}^k(\Omega)$  den Raum der auf  $\Omega$  beschränkten und  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen, versehen mit der Norm

$$\|u\|_{\mathbf{C}^k(\Omega)} := \sum_{|\boldsymbol{\beta}| \leq k} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |\partial^\beta u(\mathbf{x})|.$$

Entsprechend definiert  $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$  den Raum der beschränkten und unendlich oft differenzierbaren Funktionen, wobei

$$\mathbf{C}_0^\infty(\Omega) := \{u \in \mathbf{C}^\infty(\Omega) : \text{supp } u \subset \Omega\}$$

der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger ist.

Die Funktionenräume der stetigen Funktionen können noch feiner eingeteilt werden, wenn man zusätzlich auch die Hölder-Stetigkeit der darin enthaltenen Funktionen misst.

**Definition 2.3** Für  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $\alpha \in (0, 1]$  definiert  $\mathbf{C}^{k,\alpha}(\Omega)$  den Raum der auf  $\Omega$  Hölder-stetigen Funktionen, versehen mit der Norm

$$\|u\|_{\mathbf{C}^{k,\alpha}(\Omega)} := \|u\|_{\mathbf{C}^k(\Omega)} + \sum_{|\boldsymbol{\beta}|=k} \sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} \frac{|\partial^\beta u(\mathbf{x}) - \partial^\beta u(\mathbf{y})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha}.$$

Speziell für  $\alpha = 1$  ist  $\mathbf{C}^{k,1}(\Omega)$  der Raum aller Funktionen, deren Ableitungen  $\partial^\beta u$  der Ordnung  $|\boldsymbol{\beta}| = k$  Lipschitz-stetig sind.

Für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $\alpha \in (0, 1]$  sind sowohl  $C^k(\Omega)$  als auch  $C^{k,\alpha}(\Omega)$  Banach-Räume.

**Definition 2.4** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , ein Gebiet. Das Gebiet wird als **Lipschitz-Gebiet** bezeichnet, falls der Rand  $\Gamma = \partial\Omega$  bezüglich einer beliebigen Zerlegung stückweise durch eine bijektive Lipschitz-stetige Funktion dargestellt werden kann. Dies bedeutet, es ist

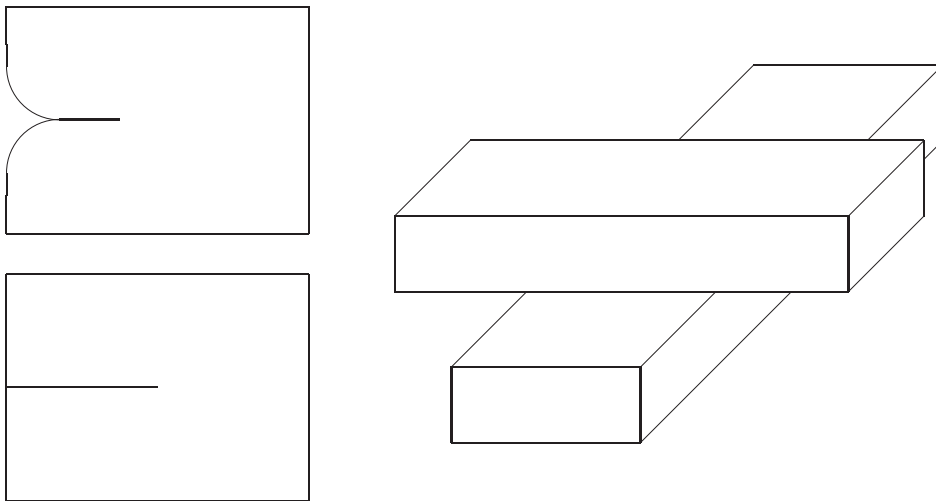
$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^m \Gamma_i \quad \text{mit} \quad \Gamma_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma}_i(\mathbf{s}) \text{ für } \mathbf{s} \in \Sigma_i \subset \mathbb{R}^{d-1}\}, \quad (2.1)$$

wobei für alle  $i = 1, 2, \dots, m$  Lipschitz-Konstanten  $L_i > 0$  existieren mögen, so dass gilt

$$\|\boldsymbol{\gamma}_i(\mathbf{s}) - \boldsymbol{\gamma}_i(\mathbf{t})\| \leq L_i \|\mathbf{s} - \mathbf{t}\| \quad \text{für alle } \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \Sigma_i.$$

Hierbei werden die Parameterbereiche  $\Sigma_i$  und somit auch die Randstücke  $\Gamma_i$  als offen vorausgesetzt. Die lokale Darstellung (2.1) ist im allgemeinen nicht eindeutig.

**Beispiel 2.5** Keine Lipschitz-Gebiete sind etwa:



△

Erfüllen die lokalen Parametrisierungen sogar  $\boldsymbol{\gamma}_i \in C^k(\Sigma_i)$  oder  $\boldsymbol{\gamma}_i \in C^{k,\alpha}(\Sigma_i)$  für alle  $i = 1, 2, \dots, m$ , dann heißt die Randkurve entsprechend  $k$ -mal stetig differenzierbar beziehungsweise Hölder-stetig zum Exponenten  $\alpha$ . Gilt diese Regularität nur lokal, so heißt das Gebiet stückweise glatt berandet.

**Definition 2.6** Mit  $L^p(\Omega)$  wird der Raum von Äquivalenzklassen aller auf  $\Omega$  definierten, messbaren Funktionen bezeichnet, deren  $p$ -te Potenz integrierbar ist. Die zugehörige Norm ist

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Zwei Funktionen  $u, v \in L^p(\Omega)$  werden miteinander identifiziert, wenn sie sich nur auf einer Menge  $K$  vom Maß  $\mu(K) = 0$  unterscheiden.

Mit  $L^\infty(\Omega)$  wird der Raum der auf  $\Omega$  messbaren und fast überall beschränkten Funktionen bezeichnet, versehen mit der Norm

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \Omega} \{|u(\mathbf{x})|\} = \inf_{K \subset \Omega: \mu(K)=0} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega \setminus K} \{|u(\mathbf{x})|\}.$$

Bezüglich der Normen  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$  sind die  $L^p(\Omega)$ -Räume vollständig, das heißt, diese Räume sind Banach-Räume. Für  $u \in L^p(\Omega)$  und  $v \in L^q(\Omega)$  mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

gilt die *Hölder-Ungleichung*

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Mit der Definition des *Dualitätsprodukts*

$$(u, v)_{\Omega} := \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

folgt insbesondere

$$\|v\|_{L^q(\Omega)} = \sup_{u \in L^p(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{(u, v)_{\Omega}}{\|u\|_{L^p(\Omega)}} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty \quad \text{und} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Für alle  $L^p(\Omega)$  mit  $1 \leq p < \infty$  ist  $L^q(\Omega)$  der Dualraum. Speziell ist  $L^\infty(\Omega)$  der Dualraum von  $L^1(\Omega)$ . Man beachte jedoch, dass  $L^1(\Omega)$  *nicht* der Dualraum von  $L^\infty(\Omega)$  ist.

Für  $p = q = 2$  definiert  $L^2(\Omega)$  den Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen und die Hölder-Ungleichung ist die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung. Weiterhin ist

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

ein Skalarprodukt in  $L^2(\Omega)$ , mit dem der Raum  $L^2(\Omega)$  ein Hilbert-Raum wird.

## 2.2 Verallgemeinerte Ableitung und Sobolev-Räume

**Definition 2.7** Mit  $L^1_{loc}(\Omega)$  wird der Raum der lokal integrierbaren Funktionen bezeichnet, das heißt,  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  ist bezüglich jeder kompakten Teilmenge  $K \subset \Omega$  integrierbar.

**Beispiel 2.8** Sei  $\Omega = (0, 1)$  und  $u(x) = 1/x$ . Wegen

$$\int_0^1 u(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) = \infty$$

ist  $u \notin L^1(\Omega)$ . Für beliebiges  $K = [a, b] \subset (0, 1) = \Omega$  folgt jedoch

$$\int_K u(x) \, dx = \int_a^b \frac{1}{x} \, dx = \log \left( \frac{b}{a} \right) < \infty$$

und somit  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ . △



Für Funktionen  $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$  gilt die Formel der partiellen Integration

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Die Integrale sind auch für nichtglatte Funktionen wohldefiniert. Dies motiviert die folgende Definition einer verallgemeinerten Ableitung:

**Definition 2.9** Eine Funktion  $u \in L_{loc}^1(\Omega)$  besitzt eine **schwache Ableitung** nach  $x_i$ , falls eine Funktion  $v \in L_{loc}^1(\Omega)$  existiert, so dass gilt

$$\int_{\Omega} v(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (2.2)$$

Die schwache Ableitung wird wieder mit  $\partial u / \partial x_i = v$  bezeichnet.

Die rekursive Anwendung von (2.2) ermöglicht durch

$$\int_{\Omega} \partial^\beta u(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \partial^\beta \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

die Definition der schwachen Ableitung  $\partial^\beta u \in L_{loc}^1(\Omega)$ .

**Beispiel 2.10** Sei  $u(x) = |x|$  für  $x \in \Omega := (-1, 1)$ . Für beliebiges  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  ist

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u(x) \frac{d}{dx} \varphi(x) \, dx &= - \int_{-1}^0 x \frac{d}{dx} \varphi(x) \, dx + \int_0^1 x \frac{d}{dx} \varphi(x) \, dx \\ &= - \underbrace{[x\varphi(x)]_{-1}^0}_{=0} + \int_{-1}^0 \varphi(x) \, dx + \underbrace{[x\varphi(x)]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \varphi(x) \, dx \\ &= - \int_{-1}^1 \text{sign}(x) \varphi(x) \, dx \end{aligned}$$

mit

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Deshalb ist die schwache Ableitung von  $u(x) = |x|$  gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x) = \text{sign}(x) \in L_{loc}^1(\Omega).$$

Für die Berechnung der zweiten Ableitung ergibt sich

$$\int_{-1}^1 \text{sign}(x) \frac{d}{dx} \varphi(x) \, dx = - \int_{-1}^0 \frac{d}{dx} \varphi(x) \, dx + \int_0^1 \frac{d}{dx} \varphi(x) \, dx = -2\varphi(0).$$

Es existiert jedoch *keine* lokal integrierbare Funktion  $v \in L_{loc}^1(\Omega)$  mit

$$\int_{-1}^1 v(x) \varphi(x) \, dx = 2\varphi(0) \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Später wird die verallgemeinerte Ableitung von  $\text{sign}(x)$  jedoch als Distribution erklärt.  $\triangle$

**Definition 2.11** Für  $k \in \mathbb{N}_0$  ist der **Sobolev-Raum**  $W^{k,p}(\Omega)$  definiert als Vervollständigung von  $C^\infty(\Omega)$  bezüglich der Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left( \sum_{|\beta| \leq k} \|\partial^\beta u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\beta| \leq k} \|\partial^\beta u\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = \infty. \end{cases} \quad (2.3)$$

Dies bedeutet, es existiert für jedes  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  eine Folge  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega)$  mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|u - \varphi_i\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0.$$

Entsprechend definiert die Vervollständigung von  $C_0^\infty(\Omega)$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$  den Sobolev-Raum

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}.$$

Die Definition der Sobolev-Normen und damit der Sobolev-Räume kann auf beliebige  $s \in \mathbb{R}$  erweitert werden. Im Fall  $s > 0$  definieren wir nämlich:

**Definition 2.12** Sei  $0 < s = k + \alpha$  mit  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $\alpha \in (0, 1)$ . Dann definiert

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left( \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p + |u|_{W^{s,p}(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

die **Sobolev-Slobodeckii-Norm** mit der Seminorm

$$|u|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left( \sum_{|\beta|=k} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\partial^\beta u(\mathbf{x}) - \partial^\beta u(\mathbf{y})|^p}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{d+p\alpha}} \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} \right)^{1/p}.$$

**Bemerkung** Ist  $s = k \in \mathbb{N}$ , so definieren wir analog die Seminorm

$$|u|_{W^{s,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left( \sum_{|\beta|=k} \|\partial^\beta u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\beta|=k} \|\partial^\beta u\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = \infty. \end{cases}$$

△

Speziell für  $p = 2$  ist  $W^{s,2}(\Omega)$  ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{W^{s,2}(\Omega)} := \sum_{|\beta| \leq k} \int_{\Omega} \partial^\beta u(\mathbf{x}) \partial^\beta v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ + \sum_{|\beta|=k} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(\partial^\beta u(\mathbf{x}) - \partial^\beta u(\mathbf{y}))(\partial^\beta v(\mathbf{x}) - \partial^\beta v(\mathbf{y}))}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{d+2\alpha}} \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y}.$$

Dabei ist der letzte Term wegzulassen, falls  $s = k \in \mathbb{N}_0$  ist.

Für  $s < 0$  und  $1 < p < \infty$  wird der Sobolev-Raum  $W^{s,p}(\Omega)$  als Dualraum von  $W_0^{-s,q}(\Omega)$  definiert. Dabei ist  $1/p + 1/q = 1$  und

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \sup_{v \in W^{-s,q}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{(u, v)_\Omega}{\|v\|_{W^{-s,q}(\Omega)}}.$$

Entsprechend wird  $W_0^{s,p}(\Omega)$  als Dualraum von  $W^{-s,q}(\Omega)$  definiert.

**Satz 2.13 (Sobolevscher Einbettungssatz)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand  $\Gamma = \partial\Omega$  und sei

$$d \leq s \quad \text{für } p = 1$$

beziehungsweise

$$\frac{d}{p} < s \quad \text{für } p > 1.$$

Für  $u \in W^{s,p}(\Omega)$  ist dann  $u \in C(\Omega)$  und es gilt

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \quad \text{für alle } u \in W^{s,p}(\Omega).$$

*Beweis.* Einen Beweis findet der geneigte Leser beispielsweise in J. Wloka "Partielle Differentialgleichungen".  $\square$

## 2.3 Distributionen und Sobolev-Räume

Beispiel 2.10 hat gezeigt, dass nicht jede Funktion in  $L^1_{loc}(\Omega)$  eine schwache Ableitung besitzt. Deshalb werden Ableitungen im distributionellen Sinn betrachtet. Dazu bezeichne  $\mathcal{D}(\Omega) := C_0^\infty(\Omega)$  den Raum der Testfunktionen.

**Definition 2.14** Eine **Distribution** ist eine stetige Linearform  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ . Dabei heißt  $T$  stetig auf  $\mathcal{D}(\Omega)$ , falls aus  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{D}(\Omega)$  stets  $T(\varphi_k) \rightarrow T(\varphi)$  in  $\mathbb{C}$  folgt. Die Gesamtheit aller Distributionen wird mit  $\mathcal{D}'(\Omega)$  bezeichnet.

Zu jedem  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  definiert

$$T_u(\varphi) := \int_{\Omega} u(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (2.4)$$

eine Distribution. Distributionen, die wie (2.4) durch Funktionen induziert werden, werden *regulär* genannt. Der Raum  $L^1_{loc}(\Omega)$  kann als eine Teilmenge von  $\mathcal{D}'(\Omega)$  aufgefasst werden, da man die Äquivalenzklassen von  $u$  aus (2.4) zurückgewinnen kann. Deshalb schreibt man statt  $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  auch  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Nichtreguläre Distributionen heißen *singulär*. Wichtigstes Beispiel einer singulären Distribution ist die für  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  durch

$$\delta_{\mathbf{x}_0}(\varphi) := \varphi(\mathbf{x}_0) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

definierte  $\delta$ - oder *Dirac-Distribution*.

Analog zur schwachen Ableitung können wir nun die distributionelle Ableitung definieren:

**Definition 2.15** Die Distribution  $\partial^\beta T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  heißt **distributionelle Ableitung** von  $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , falls gilt

$$(\partial^\beta T_u)(\varphi) = (-1)^{|\beta|} T_u(\partial^\beta \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Beispiel 2.16** (Fortsetzung von Beispiel 2.10) Für die Funktion  $u(x) = \text{sign}(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$  und  $\Omega = (-1, 1)$  ergibt sich durch partielle Integration

$$\int_{-1}^1 \text{sign}(x) \frac{d}{dx} \varphi(x) dx = -2\varphi(0) = - \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial x} u(x) \varphi(x) dx \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Somit ist die distributionelle Ableitung von  $u$  gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x) = 2\delta_0(x) \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

△

Im folgenden führen wir Sobolev-Räume  $H^s(\Omega)$  ein, die unter bestimmten Voraussetzungen an die Glattheit des Gebiets  $\Omega$  äquivalent zu den Räumen  $W^{s,2}(\Omega)$  sind.

**Definition 2.17** Der Raum  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  der schnell abklingenden Funktionen ist der Raum der in  $\mathbb{R}^d$  unendlich oft differenzierbaren Funktionen  $\varphi$  mit

$$\|\varphi\|_{k,\ell} := \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \left\{ (1 + \|\mathbf{x}\|^k) \sum_{|\beta| \leq \ell} |\partial^\beta \varphi(\mathbf{x})| \right\} < \infty \quad \text{für alle } k, \ell \in \mathbb{N}_0.$$

Dies bedeutet,  $\varphi$  klingt mitsamt seiner Ableitungen schneller ab als jedes Polynom.

**Beispiel 2.18** Für die Funktion  $\varphi(\mathbf{x}) := e^{-\|\mathbf{x}\|^2}$  ist  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , aber es gilt  $\varphi \notin C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ .  
△

Analog zur Definition 2.14 wird der Raum  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  der *temperierten Distributionen* erklärt als der Raum der über  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  komplexwertigen und stetigen Linearformen.

**Definition 2.19** Für Funktionen  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  definiert

$$\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) := (\mathcal{F}\varphi)(\boldsymbol{\xi}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$$

die **Fourier-Transformierte**  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .

Die Abbildung  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  ist eine Isometrie (und damit eindeutig) und die

inverse Fourier-Transformation ist gegeben durch

$$(\mathcal{F}^{-1}\widehat{\varphi})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d.$$

Darüberhinaus gelten für alle  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  und  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}_0^d$  die Rechenregeln

$$\begin{aligned} \partial^{\boldsymbol{\beta}}(\mathcal{F}\varphi)(\boldsymbol{\xi}) &= (-i)^{|\boldsymbol{\beta}|} \mathcal{F}(\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}\varphi)(\boldsymbol{\xi}), \\ \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\beta}}(\mathcal{F}\varphi)(\boldsymbol{\xi}) &= (-i)^{|\boldsymbol{\beta}|} \mathcal{F}(\partial^{\boldsymbol{\beta}}\varphi)(\boldsymbol{\xi}). \end{aligned} \tag{2.5}$$

**Bemerkung** Das Unschärfeprinzip besagt, dass aus  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  immer  $\widehat{\varphi} \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  folgt.  $\triangle$

**Lemma 2.20** Die Fourier-Transformation erhält die Rotationssymmetrie, das heißt, für  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  gilt  $\widehat{u}(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{u}(\|\boldsymbol{\xi}\|)$  für alle  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$  genau dann, wenn  $u(\mathbf{x}) = u(\|\mathbf{x}\|)$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  gilt.

*Beweis.* Sei zunächst  $d = 2$ . Die Darstellung in Polarkoordinaten

$$\boldsymbol{\xi} = \|\boldsymbol{\xi}\| \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = r \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix}$$

ergibt

$$\begin{aligned} \widehat{u}(\boldsymbol{\xi}) &= \widehat{u}(\|\boldsymbol{\xi}\|, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-ir\|\boldsymbol{\xi}\|(\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi)} u(r) r \, d\phi \, dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-ir\|\boldsymbol{\xi}\| \cos(\phi - \psi)} u(r) r \, d\phi \, dr. \end{aligned}$$

Für  $\psi_0 \in [0, 2\pi)$  und der Substitution  $\widetilde{\phi} = \phi - \psi_0$  erhalten wir deshalb

$$\begin{aligned} \widehat{u}(\|\boldsymbol{\xi}\|, \psi + \psi_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-ir\|\boldsymbol{\xi}\| \cos(\phi - \psi - \psi_0)} u(r) r \, d\phi \, dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\psi_0}^{2\pi - \psi_0} e^{-ir\|\boldsymbol{\xi}\| \cos(\widetilde{\phi} - \psi)} u(r) r \, d\widetilde{\phi} \, dr. \end{aligned}$$

Hieraus folgt wegen

$$\int_{-\psi_0}^0 e^{-ir\|\boldsymbol{\xi}\| \cos(\widetilde{\phi} - \psi)} \, d\widetilde{\phi} = \int_{2\pi - \psi_0}^{2\pi} e^{-ir\|\boldsymbol{\xi}\| \cos(\widetilde{\phi} - \psi)} \, d\widetilde{\phi}$$

die Rotationssymmetrie  $\widehat{u}(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{u}(\|\boldsymbol{\xi}\|)$ : für beliebiges  $\psi_0 \in [0, 2\pi)$  ist

$$\widehat{u}(\|\boldsymbol{\xi}\|, \psi + \psi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-ir\|\boldsymbol{\xi}\| \cos(\widetilde{\phi} - \psi)} u(r) r \, d\widetilde{\phi} \, dr = \widehat{u}(\|\boldsymbol{\xi}\|, \psi).$$

Für  $d = 3$  verwenden wir Kugelkoordinaten

$$\boldsymbol{\xi} = \|\boldsymbol{\xi}\| \begin{bmatrix} \cos \psi \sin \vartheta \\ \sin \psi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = r \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\widehat{u}(\boldsymbol{\xi}) &= \widehat{u}(\|\boldsymbol{\xi}\|, \psi, \vartheta) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-ir\|\boldsymbol{\xi}\|\{\cos(\phi-\psi)\sin\theta\sin\vartheta+\cos\theta\cos\vartheta\}} u(r)r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr.\end{aligned}$$

Wie im Fall  $d = 2$  ergibt sich

$$\widehat{u}(\|\boldsymbol{\xi}\|, \psi + \psi_0, \vartheta) = \widehat{u}(\|\boldsymbol{\xi}\|, \psi, \vartheta). \quad \text{für alle } \psi_0 \in [0, 2\pi).$$

Für festes  $\vartheta \in [0, \pi)$  und vorgegebenen Radius  $\rho$  gilt folglich  $\widehat{u}(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{u}(\|\boldsymbol{\xi}\|) = \widehat{u}(\rho)$  entlang der Kreislinie

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = \rho^2 \quad \text{und} \quad \xi_3 = \rho \cos \vartheta.$$

Die Verwendung vertauschter Kugelkoordinaten liefert allerdings auch  $\widehat{u}(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{u}(\|\boldsymbol{\xi}\|) = \widehat{u}(\rho)$  entlang der Kreislinie

$$\xi_1^2 + \xi_3^2 = \rho^2 \quad \text{und} \quad \xi_2 = \rho \cos \vartheta.$$

Dies impliziert die Behauptung  $\widehat{u}(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{u}(\|\boldsymbol{\xi}\|)$  für alle  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$ .  $\square$

Wir wollen die Fourier-Transformation mittels Dualität auf  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  übertragen: Für Distributionen  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  wird die Fourier-Transformierte  $\widehat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  durch

$$\widehat{T}(\varphi) := T(\widehat{\varphi}) \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

definiert. Die Abbildung  $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  ist eindeutig und die inverse Fourier-Transformation ist durch

$$(\mathcal{F}^{-1}T)(\varphi) := T(\mathcal{F}^{-1}\varphi) \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

erklärt. Die Rechenregeln (2.5) bleiben entsprechend für Distributionen  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  gültig.

**Definition 2.21** Für  $s \in \mathbb{R}$  ist der **Bessel-Potentialoperator**  $\mathcal{J}^s : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  definiert durch

$$(\mathcal{J}^s u)(\mathbf{x}) := (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^2)^{s/2} \widehat{u}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \, d\boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Wie man leicht nachrechnet ist

$$\mathcal{J}^s u = \mathcal{F}^{-1} \left( (1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^2)^{s/2} \mathcal{F}u \right),$$

das heißt,  $\mathcal{J}^s$  ist linear und beschränkt. Im Fourier-transformierten Raum entspricht für  $s > 0$  aufgrund der Gleichung

$$\mathcal{F} \mathcal{J}^s u = (1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^2)^{s/2} \mathcal{F}u$$

die Anwendung von  $\mathcal{J}^s$  der Multiplikation mit einer Funktion der Ordnung  $\mathcal{O}(\|\boldsymbol{\xi}\|^s)$ . Gemäß (2.5) kann  $\mathcal{J}^s$  daher als Differentialoperator der Ordnung  $s$  angesehen werden.

Der Bessel-Potentialoperator  $\mathcal{J}^s$  kann per Dualität ebenfalls auf Distributionen angewendet werden. Für  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  wird durch

$$(\mathcal{J}^s T)(\varphi) = T(\mathcal{J}^s \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

ein beschränkter, linearer Operator  $\mathcal{J}^s : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  auf dem Raum der temperierten Distributionen definiert.

**Definition 2.22** Für alle  $s \in \mathbb{R}$  ist der **Sobolev-Raum**  $H^s(\mathbb{R}^d)$  der Raum aller Distributionen  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  mit  $\mathcal{J}^s u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , ausgestattet mit dem Innenprodukt

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^d)} = (\mathcal{J}^s u, \mathcal{J}^s v)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{J}^s u)(\mathbf{x}) \overline{(\mathcal{J}^s v)(\mathbf{x})} \, d\mathbf{x}.$$

Dieses induziert die Norm

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}^2 = \|\mathcal{J}^s u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^2)^s |\widehat{u}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi}.$$

Für ein Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  und  $s \in \mathbb{R}$  ist der Sobolev-Raum  $H^s(\Omega)$  definiert durch

$$H^s(\Omega) := \{u = \tilde{u}|_{\Omega} : \tilde{u} \in H^s(\mathbb{R}^d)\}$$

mit der Norm

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \inf_{\tilde{u} \in H^s(\mathbb{R}^d) : \tilde{u}|_{\Omega} = u} \|\tilde{u}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Außerdem werden die Sobolev-Räume

$$\tilde{H}^s(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}}, \quad H_0^s(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^s(\Omega)}}$$

eingeführt, die für fast alle  $s \geq 0$  zusammenfallen.

**Satz 2.23** Für ein Lipschitz-Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  und  $s \geq 0$  gilt

$$\tilde{H}^s(\Omega) \subset H_0^s(\Omega).$$

Insbesondere ist

$$\tilde{H}^s(\Omega) = H_0^s(\Omega) \quad \text{für alle } s \notin \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \right\}.$$

Weiterhin ist

$$\tilde{H}^s(\Omega) = (H^{-s}(\Omega))', \quad H^s(\Omega) = (\tilde{H}^{-s}(\Omega))' \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}.$$

*Beweis.* Der interessierte Leser sei auf W. McLean “Strongly elliptic systems and boundary integral equations” verwiesen.  $\square$

Die Äquivalenz der Sobolev-Räume  $W^{s,2}(\Omega)$  und  $H^s(\Omega)$  gilt nur bei hinreichender Glattheit des Gebiets  $\Omega$ :

**Satz 2.24** Für ein Lipschitz-Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  gilt

$$W^{s,2}(\Omega) = H^s(\Omega) \quad \text{für alle } s \geq 0, \quad (2.6)$$

woraus insbesondere auch

$$W_0^{s,2}(\Omega) = H_0^s(\Omega) \quad \text{für alle } s \geq 0$$

folgt. Ist  $\Omega = \mathbb{R}^d$ , so gilt die Gleichung (2.6) sogar für alle  $s \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Einen Beweis dieses Satzes findet man zum Beispiel in J. Wloka “Partielle Differentialgleichungen”.  $\square$

## 2.4 Sobolev-Räume auf Mannigfaltigkeiten

Der Rand  $\Gamma := \partial\Omega$  des beschränkten Gebiets  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  sei durch eine beliebige überlappende Parametrisierung beschrieben:

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^m \Gamma_i \quad \text{mit} \quad \Gamma_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} = \gamma_i(\mathbf{s}) \text{ für } \mathbf{s} \in \Sigma_i \subset \mathbb{R}^{d-1}\}.$$

**Definition 2.25** Eine **Zerlegung der Eins** zur überlappenden Zerlegung  $\Gamma = \bigcup_{i=1}^m \Gamma_i$  ist eine Menge von nichtnegativen Abschneidefunktionen  $\{\varphi_i\}_{i=1}^m \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit den Eigenschaften

1.  $\varphi_i(\mathbf{x}) = 0$  für alle  $\mathbf{x} \in \Gamma \setminus \Gamma_i$  und
2.  $\sum_{i=1}^m \varphi_i(\mathbf{x}) = 1$  für alle  $\mathbf{x} \in \Gamma$ .

Mit Hilfe der Zerlegung der Eins finden wir für jede auf  $\Gamma$  definierte Funktion

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) =: \sum_{i=1}^m u_i(\mathbf{x}) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Einsetzen der Parametrisierung liefert

$$u_i(\mathbf{x}) = \varphi_i(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = \varphi_i(\gamma_i(\mathbf{s}))u(\gamma_i(\mathbf{s})) = \tilde{u}_i(\mathbf{s}) \quad \text{für alle } \mathbf{x} = \gamma_i(\mathbf{s}) \in \Gamma_i.$$

Für die Funktionen  $\tilde{u}_i$  können wir nun Sobolev-Räume bezüglich der beschränkten Parametergebiete  $\Sigma_i \subset \mathbb{R}^{d-1}$  einführen. Nach der Kettenregel setzt dies die Existenz der entsprechenden Ableitungen der Parametrisierungen  $\gamma_i$  voraus. Ableitungen der Ordnung  $|\beta| \leq k$  sind jedoch nur dann erklärt, falls  $\gamma_i \in C^{k-1,1}(\Sigma_i)$  gilt. Für ein Lipschitz-Gebiet  $\Omega$  mit  $\gamma_i \in C^{0,1}(\Sigma_i)$  sind also nur Sobolev-Räume  $H^s(\Sigma_i)$  mit  $|s| \leq 1$  erklärt. Allgemein kann für  $0 \leq s \leq k$  eine Sobolev-Norm

$$\|u\|_{H^s_\gamma(\Gamma)} := \left( \sum_{i=1}^m \|\tilde{u}_i\|_{H^s(\Sigma_i)}^2 \right)^{1/2}$$

und somit ein Sobolev-Raum  $H^s(\Gamma)$  definiert werden.



**Lemma 2.26** Für  $s = 0$  definiert

$$\|u\|_{L^2(\Gamma)} = \left( \int_{\Gamma} |u(\mathbf{x})|^2 d\sigma \right)^{1/2}$$

eine zu  $\|u\|_{H_{\gamma}^0(\Gamma)}$  äquivalente Norm.

*Beweis.* Es gilt

$$\|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \int_{\Gamma} |u(\mathbf{x})|^2 d\sigma = \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i} \varphi_i(\mathbf{x}) |u(\mathbf{x})|^2 d\sigma.$$

Einsetzen der Parametrisierung ergibt

$$\|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \sum_{i=1}^m \int_{\Sigma_i} \varphi_i(\gamma_i(\mathbf{s})) |u(\gamma_i(\mathbf{s}))|^2 \det \gamma_i(\mathbf{s}) ds.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit

$$\|u\|_{H_{\gamma}^0(\Gamma)}^2 = \sum_{i=1}^m \int_{\Sigma_i} |\varphi_i(\gamma_i(\mathbf{s})) u(\gamma_i(\mathbf{s}))|^2 ds,$$

so folgt die Behauptung, wobei die Äquivalenzkonstanten von der gewählten Parametrisierung und den Abschneidefunktionen abhängen.  $\square$

Für  $s \in (0, 1)$  folgt wie eben, dass die durch

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} := \left( \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{d-1+2s}} d\sigma_{\mathbf{x}} d\sigma_{\mathbf{y}} \right)^{1/2}$$

definierte Sobolev-Slobodeckii-Norm ebenfalls äquivalent zu  $\|u\|_{H_{\gamma}^s(\Gamma)}$  ist.

Für  $s < 0$  wird der Sobolev-Raum  $H^s(\Gamma)$  als Dualraum des  $H^{-s}(\Gamma)$  definiert,

$$H^s(\Gamma) = [H^{-s}(\Gamma)]',$$

versehen mit der Norm

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} = \sup_{v \in H^{-s}(\Gamma) \setminus \{0\}} \frac{(u, v)_{\Gamma}}{\|v\|_{H^{-s}(\Gamma)}}$$

bezüglich des Dualitätsprodukts

$$(u, v)_{\Gamma} := \int_{\Gamma} u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\sigma.$$

## 2.5 Spuroperator

**Definition 2.27** Die Abbildung

$$\gamma_0^{int} : C(\overline{\Omega}) \rightarrow C(\Gamma), \quad (\gamma_0^{int}u)(\mathbf{x}) = \lim_{\Omega \ni \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma} u(\mathbf{z})$$

heißt der (innere) **Spuroperator**.

Der Spuroperator lässt sich nicht nur für klassisch glatte Funktionen definieren, sondern kann stetig auf Sobolev-Räume erweitert werden.

**Satz 2.28 (Spursatz)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein  $C^{k-1,1}$ -Gebiet. Dann kann für alle  $1/2 < s \leq k$  der Spuroperator in eindeutiger Weise stetig auf  $H^s(\Omega)$  erweitert werden als beschränkter, linearer Operator  $\gamma_0^{int} : H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-1/2}(\Gamma)$ , das heißt

$$\|\gamma_0^{int}u\|_{H^{s-1/2}(\Gamma)} \leq c_\Gamma \|u\|_{H^s(\Omega)} \quad \text{für alle } u \in H^s(\Omega).$$

*Beweis.* Zum Beweis des Satzes sei auf J. Wloka “Partielle Differentialgleichungen” verwiesen.  $\square$

**Bemerkung** Für Lipschitz-Gebiete kann man sogar zeigen, dass der Spuroperator stetig ist für alle  $s \in (1/2, 3/2)$ .  $\triangle$

Natürlich hat der Spuroperator keine Inverse, da Funktionen, obwohl sie auf dem Gebietsrand übereinstimmen, sich im Gebietsinneren unterscheiden können. Allerdings existiert ein stetiger Fortsetzungsoperator  $\mathcal{E} : H^{s-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^s(\Omega)$ , der rechtsinvers zum Spuroperator ist:

**Satz 2.29 (inverser Spursatz)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein  $C^{k-1,1}$ -Gebiet und  $1/2 < s \leq k$ . Dann besitzt der Spuroperator  $\gamma_0^{int} : H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-1/2}(\Gamma)$  eine stetige Rechtsinverse

$$\mathcal{E} : H^{s-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^s(\Omega)$$

mit  $\gamma_0^{int}\mathcal{E}u = u$  für alle  $u \in H^{s-1/2}(\Gamma)$ .

*Beweis.* Zum Beweis des Satzes sei ebenfalls auf J. Wloka “Partielle Differentialgleichungen” verwiesen.  $\square$

## 3. Schwache Formulierung von Randwertproblemen

### 3.1 Dirichlet-Problem

Gegeben sei ein symmetrischer und elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$(\mathcal{L}u)(\mathbf{x}) = -\operatorname{div}(\mathbf{A}\nabla u(\mathbf{x})) + bu(\mathbf{x}), \quad b \geq 0. \quad (3.1)$$

Folglich ist  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$  eine symmetrisch und positiv definite Matrix. Auf dem Lipschitz-Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  betrachten wir das zugehörige *Dirichlet-Randwertproblem*

$$\mathcal{L}u = f \text{ in } \Omega, \quad \gamma_0^{\text{int}}u = g \text{ auf } \Gamma. \quad (3.2)$$

**Definition 3.1** Die Abbildung

$$\gamma_1^{\text{int}} : C^1(\overline{\Omega}) \rightarrow C(\Gamma), \quad (\gamma_1^{\text{int}}u)(\mathbf{x}) = \lim_{\Omega \ni \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma} \langle \mathbf{A}\nabla u(\mathbf{z}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle$$

heißt die (innere) **Konormalenableitung**.

**Bemerkung** Wir werden in Satz 3.5 sehen, dass die Konormalenableitung sogar als stetiger Operator  $\gamma_1^{\text{int}} : H^1(\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  definiert ist.  $\triangle$

Für jede Testfunktion  $v \in H^1(\Omega)$  erhalten wir mit Hilfe der ersten Greenschen Formel

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{A}\nabla u(\mathbf{x}))v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \langle \mathbf{A}\nabla u(\mathbf{x}), \nabla v(\mathbf{x}) \rangle \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} (\gamma_1^{\text{int}}u)(\mathbf{x})(\gamma_0^{\text{int}}v)(\mathbf{x}) \, d\sigma.$$

Der Randterm entfällt, wenn wir uns auf Testfunktionen beschränken, die am Rand verschwinden. Deshalb suchen wir eine Funktion

$$u \in V_g := \{v \in H^1(\Omega) : \gamma_0^{\text{int}}v = g\},$$

so dass für alle  $v \in H_0^1(\Omega)$  die Variationsformulierung

$$a(u, v) = (f, v)_{\Omega}$$

mit der Bilinearform

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \{ \langle \mathbf{A}\nabla u(\mathbf{x}), \nabla v(\mathbf{x}) \rangle + bu(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \} \, d\mathbf{x} \quad (3.3)$$

erfüllt ist.

**Definition 3.2** Jede Lösung des Variationsproblems

$$\text{suche } u \in V_g, \text{ so dass } a(u, v) = (f, v)_\Omega \text{ für alle } v \in H_0^1(\Omega) \quad (3.4)$$

wird **schwache Lösung** des Dirichlet-Randwertproblems (3.2) genannt.

**Satz 3.3** Für  $f \in H^{-1}(\Omega)$  und  $g \in H^{1/2}(\Gamma)$  besitzt das Variationsproblem (3.4) eine eindeutige Lösung  $u \in V_g$ , und es gilt

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \{ \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \}. \quad (3.5)$$

*Beweis.* Nach dem inversen Spursatz (Satz 2.29) existiert für die gegebenen Dirichlet-Daten  $g \in H^{1/2}(\Gamma)$  eine Fortsetzung  $u_g := \mathcal{E}g \in H^1(\Omega)$  mit  $\gamma_0^{int} u_g = g$  und

$$\|u_g\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Zu bestimmen bleibt  $u_0 = u - u_g \in H_0^1(\Omega)$  als Lösung des Variationsproblems

$$a(u_0, v) = (f, v)_\Omega - a(u_g, v) \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Da die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  stetig und nach Voraussetzung auch elliptisch auf  $H_0^1(\Omega)$  ist, existiert nach dem Satz von Lax-Milgram eine eindeutige Lösung hiervon. Aus der Abschätzung

$$c_E \|u_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a(u_0, u_0) = (f, u_0)_\Omega - a(u_g, u_0) \leq \{ \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + c_S \|u_g\|_{H^1(\Omega)} \} \|u_0\|_{H^1(\Omega)}$$

folgt unmittelbar die Stabilitätsabschätzung (3.5).  $\square$

Gilt im Variationsproblem (3.4)  $f = \mathcal{L}u \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$ , dann lässt sich die Konormalenableitung mit Hilfe der ersten Greenschen Formel auf die eindeutige Lösung  $u \in H^1(\Omega)$  erweitern.

**Definition 3.4** Zu  $f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$  sei  $u \in H^1(\Omega)$  die eindeutige Lösung des Variationsproblems (3.4). Dann ist die **schwache Konormalenableitung**  $\gamma_1^{int} u \in H^{-1/2}(\Gamma)$  definiert als Lösung der Variationsformulierung

$$\text{suche } \gamma_1^{int} u \in H^{-1/2}(\Gamma), \text{ so dass } (\gamma_1^{int} u, v)_\Gamma = a(u, \mathcal{E}v) - (f, \mathcal{E}v)_\Omega \text{ für alle } v \in H^{1/2}(\Gamma).$$

**Bemerkung** Eine äquivalente Definition der schwachen Konormalenableitung erfolgt via der Variationsformulierung

$$\text{suche } \gamma_1^{int} u \in H^{-1/2}(\Gamma), \text{ so dass } (\gamma_1^{int} u, \gamma_0^{int} v)_\Gamma = a(u, v) - (f, v)_\Omega \text{ für alle } v \in H^1(\Omega).$$

$\triangle$

Ist  $u \in C^1(\overline{\Omega})$ , so folgt natürlich aus der ersten Greenschen Formel, dass die klassische und die schwache Konormalenableitung übereinstimmen. Die Wohldefiniertheit der schwachen Konormalenableitung folgt aus dem folgenden Satz:

**Satz 3.5** Zu jedem  $u \in H^1(\Omega)$  ist die schwache Konormalenableitung eindeutig bestimmt mit

$$\|\gamma_1^{int} u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq c\{\|f\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\}. \quad (3.6)$$

Speziell im Fall  $f = 0$  gilt

$$\|\gamma_1^{int} u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \leq ca(u, u).$$

Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir das folgende Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis.

**Lemma 3.6** Seien  $U$  und  $V$  zwei Hilbert-Räume und  $a : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine Bilinearform. Das Variationsproblem

$$\text{suche } u \in U, \text{ so dass } a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V \quad (3.7)$$

besitzt zu jedem  $f \in V'$  eine eindeutige Lösung  $u \in U$ , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i.) Die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  ist stetig, das heißt, es ist

$$|a(u, v)| \leq c_S \|u\|_U \|v\|_V \quad \text{für alle } u \in U, v \in V.$$

(ii.) Es gilt die *inf-sup-Bedingung*

$$\inf_{u \in U \setminus \{0\}} \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{a(u, v)}{\|u\|_U \|v\|_V} \geq c_E > 0.$$

(iii.) Zu jedem  $v \in V \setminus \{0\}$  existiert ein  $u \in U$  mit  $a(u, v) \neq 0$ .

Ferner erfüllt die Lösung  $u$  in diesem Fall die Stabilitätsaussage

$$\|u\|_U \leq \frac{1}{c_E} \|f\|_{V'}.$$

*Beweis.* Die Eindeutigkeit einer etwaigen Lösung  $u \in U$  folgt unmittelbar aus der inf-sup-Bedingung. Denn ist  $\tilde{u} \in U$  eine weitere Lösung, so gilt aufgrund der Linearität  $a(u - \tilde{u}, v) = 0$  für alle  $v \in V$ . Daraus folgt aber

$$\sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{a(u - \tilde{u}, v)}{\|v\|_V} = 0,$$

was wegen der inf-sup-Bedingung  $u - \tilde{u} = 0$  bedeutet.

Die Stabilitätsaussage folgt ebenfalls aus der inf-sup-Bedingung, denn es gilt

$$c_E \|u\|_U \leq \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{a(u, v)}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\langle f, v \rangle}{\|v\|_V} \leq \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|f\|_{V'} \|v\|_V}{\|v\|_V} = \|f\|_{V'}.$$

Es verbleibt also noch, die Existenz einer Lösung nachzuweisen. Hierzu betrachten wir die Menge

$$W := \{v \in V : a(u, v) = 0 \text{ für alle } u \in U\} \subset V.$$

Wir führen ferner den linearen Operator  $A : U \rightarrow V'$  ein, der definiert ist durch

$$\langle Au, v \rangle := a(u, v).$$

Der Operator  $A$  ist stetig, da  $a(\cdot, \cdot)$  es ist. Ebenso ist  $A^{-1}$  auf dem Bild  $A(U)$  stetig, denn aus  $c_E \|u\|_U \leq \|Au\|_{V'}$  folgt nämlich

$$\|A^{-1}f\|_U \leq \frac{1}{c_E} \|f\|_{V'} \quad \text{für alle } f \in A(U).$$

Folglich ist das Bild  $A(U)$  abgeschlossen in  $V'$ . Nach dem Satz vom abgeschlossenen Bild ist dies genau dann der Fall, wenn

$$A(U) = \text{kern}(A^*)^\perp = \{v \in V' : \langle v, w \rangle = 0 \text{ für alle } w \in \text{kern}(A^*)\}$$

gilt, wobei  $A^* : V \rightarrow U'$  der zu  $A$  adjungierten Operator ist, gegeben durch  $\langle u, A^*v \rangle = \langle Au, v \rangle$ . Offensichtlich ist  $\text{kern}(A^*) = W$ . Daher ist

$$A(U) = \text{kern}(A^*)^\perp = W^\perp = \{v \in V' : \langle v, w \rangle = 0 \text{ für alle } w \in W\}.$$

Aufgrund der Bedingung (iii.) gilt aber  $W = \{0\}$ . Daher ist  $A(U) = \{0\}^\perp = V'$ , das heißt,  $A$  ist surjektiv. Die Lösung von (3.7) erhalten wir daher durch  $u := A^{-1}f$  für beliebig vorgegebenes  $f \in V'$ .  $\square$

**Bemerkung** Dieses Lemma ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Lax-Milgram, denn im Fall  $U = V$  und einer  $V$ -elliptischen Bilinearform mit Elliptizitätskonstante  $c_E > 0$  folgt die inf-sup Bedingung gemäß

$$\inf_{u \in V \setminus \{0\}} \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{a(u, v)}{\|u\|_V \|v\|_V} \geq \inf_{u \in V \setminus \{0\}} \frac{a(u, u)}{\|u\|_V^2} \geq c_E.$$

Die Bedingung (iii.) ergibt sich ebenso unmittelbar, indem man  $u = v$  wählt und die Elliptizität verwendet.  $\triangle$

*Beweis von Satz 3.5.* Die Bilinearform  $b(u, v) := (u, v)_\Gamma$  ist offensichtlich stetig auf  $U \times V$  für  $U = H^{-1/2}(\Gamma)$  und  $V = H^{1/2}(\Gamma)$ . Ferner folgt die inf-sup-Bedingung mit  $c_E = 1$  sofort aus der Definition der  $H^{-1/2}(\Gamma)$ -Norm:

$$\|\gamma_1^{int} u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \sup_{v \in H^{1/2}(\Gamma) \setminus \{0\}} \frac{(\gamma_1^{int} u, v)_\Gamma}{\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}}.$$

Da  $H^{1/2}(\Gamma) \subset H^{-1/2}(\Gamma)$  gilt, ist auch die dritte Bedingung aus Lemma 3.6 erfüllt indem man einfach  $u = v$  wählt. Da die rechte Seite ein stetiges Funktional aus  $V' = H^{-1/2}(\Gamma)$  definiert

$$a(u, \mathcal{E}v) - (f, \mathcal{E}v)_\Omega \leq c \{ \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)} \} \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)},$$

ist folglich  $\gamma_1^{int} u \in H^{-1/2}(\Gamma)$  eindeutig bestimmt. Insbesondere gilt die Stabilitätsaussage (3.6).  $\square$

## 3.2 Neumann-Problem

Für den Differentialoperator (3.1) betrachten wir nun das *Neumann-Randwertproblem*

$$\mathcal{L}u = f \text{ in } \Omega, \quad \gamma_1^{int} u = g \text{ auf } \Gamma. \quad (3.8)$$

Testen dieser Differentialgleichung mit einer Funktion  $v \in H^1(\Omega)$  ergibt mit Hilfe von partieller Integration die Variationsformulierung

$$a(u, v) = (f, v)_\Omega + (g, \gamma_0^{int} v)_\Gamma$$

mit der Bilinearform (3.3). Im Fall  $b > 0$  ist der Energieraum  $V := H^1(\Omega)$ , da  $a(\cdot, \cdot)$  hierauf elliptisch ist. Im Fall  $b = 0$  ist die Bilinearform (3.3) nicht mehr elliptisch in  $H^1(\Omega)$ , denn mit jeder Lösung  $u \in H^1(\Omega)$  von (3.8) ist offensichtlich  $u + const \in H^1(\Omega)$  ebenfalls eine Lösung. Setzt man ferner  $v(\mathbf{x}) \equiv 1$  in die Variationsformulierung ein, so erkennt man, dass die *Kompatibilitätsbedingung*

$$\int_\Omega f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_\Gamma g(\mathbf{x}) \, d\sigma = 0$$

erfüllt sein muss. Weil in  $H^1(\Omega)$  eine Poincaré-Friedrichssche Ungleichung der Form

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left\{ \left| \int_\Omega v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right| + |v|_{H^1(\Omega)} \right\} =: \|v\|_V$$

gilt und folglich  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  und  $\|\cdot\|_V$  äquivalente Normen sind, erhalten wir die Elliptizität der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  im Energieraum

$$V := \left\{ v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \right\} \subset H^1(\Omega).$$

**Satz 3.7** Für  $f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$  und  $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$  besitzt das Variationsproblem

$$\text{suche } u \in V, \text{ so dass } a(u, v) = (f, v)_\Omega + (g, \gamma_0^{int} v)_\Gamma \text{ für alle } v \in V$$

eine eindeutige (schwache) Lösung  $u \in V$ , und es gilt

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left\{ \|f\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \right\}. \quad (3.9)$$

*Beweis.* Da die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$   $V$ -elliptisch ist, folgt die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung unmittelbar aus dem Satz von Lax-Milgram. Die Stabilitätsabschätzung (3.9) folgt aus

$$c_E \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a(u, u) = (f, u)_\Omega + (g, \gamma_0^{int} u)_\Gamma \leq \left\{ \|f\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)} + c_\Gamma \|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \right\} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

□

## 4. Fundamentallösung

Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$\mathcal{L}u = f \quad \text{in } \Omega \quad (4.1)$$

mit einem symmetrischen Differentialoperator zweiter Ordnung. Dabei wollen wir uns im folgenden auf konstante Koeffizienten beschränken, das heißt, es sei

$$(\mathcal{L}u)(\mathbf{x}) = -\operatorname{div}(\mathbf{A}\nabla u(\mathbf{x})) + bu(\mathbf{x}). \quad (4.2)$$

Hier bezeichne  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$  eine symmetrische und positiv definite Matrix und  $b \in \mathbb{R}$  eine reelle Zahl. Die zweite Greensche Formel für die Lösung  $u$  und einer beliebigen Testfunktion  $v$  lautet

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathcal{L}u)(\mathbf{y})v(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - \int_{\Omega} u(\mathbf{y})(\mathcal{L}v)(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ = \int_{\Gamma} (\gamma_0^{\text{int}}u)(\mathbf{y})(\gamma_1^{\text{int}}v)(\mathbf{y}) \, d\sigma - \int_{\Gamma} (\gamma_1^{\text{int}}u)(\mathbf{y})(\gamma_0^{\text{int}}v)(\mathbf{y}) \, d\sigma. \end{aligned}$$

Kann nun eine Funktion  $v(\mathbf{y}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  angegeben werden mit

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}_{\mathbf{y}}G)(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

dann folgt die *Darstellungsformel*

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} (\gamma_1^{\text{int}}u)(\mathbf{y})(\gamma_{0,\mathbf{y}}^{\text{int}}G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \\ - \int_{\Gamma} (\gamma_0^{\text{int}}u)(\mathbf{y})(\gamma_{1,\mathbf{y}}^{\text{int}}G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega} f(\mathbf{y})G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned}$$

Mit ihrer Hilfe kann die Lösung  $u$  der partiellen Differentialgleichung (4.1) aus der Kenntnis der *Cauchy-Daten*  $(\gamma_0^{\text{int}}u, \gamma_1^{\text{int}}u)$  gewonnen werden. Wegen

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \delta_0(\mathbf{y} - \mathbf{x})u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

ist die Berechnung der Funktion  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  äquivalent zur distributionellen Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{y}}G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta_0(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega. \quad (4.3)$$



**Definition 4.1** Eine Lösung  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  der Gleichung (4.3) wird **Fundamentallösung** oder **Greensche Funktion** genannt.

**Satz 4.2** Die Fundamentallösung des Laplace-Operators im  $\mathbb{R}^d$  lautet

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}, & \text{falls } d = 3, \\ -\frac{1}{2\pi} \log \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, & \text{falls } d = 2. \end{cases}$$

*Beweis.* Wir demonstrieren den Beweis nur im Fall  $d = 3$ . Weil der Laplace-Operator invariant gegenüber Translation und Rotation ist, machen wir den Ansatz  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = v(\mathbf{z}) = v(\|\mathbf{z}\|)$  mit  $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ . Zu lösen ist demnach

$$-\Delta v(\mathbf{z}) = \delta_0(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3.$$

Aufgrund der Rechenregeln (2.5) liefert die Anwendung der Fourier-Transformation

$$\|\boldsymbol{\xi}\|^2 \widehat{v}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3,$$

woraus

$$\widehat{v}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\|\boldsymbol{\xi}\|^2} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$$

folgt. Für die Fourier-Transformierte  $\widehat{v}$  einer temperierten Distribution  $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$  gilt nach Definition

$$\int_{\mathbb{R}^3} \widehat{v}(\boldsymbol{\xi}) \varphi(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} = \int_{\mathbb{R}^3} v(\mathbf{z}) \widehat{\varphi}(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Mit

$$\varphi(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \widehat{\varphi}(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z}$$

ist

$$\int_{\mathbb{R}^3} \widehat{v}(\boldsymbol{\xi}) \varphi(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \widehat{\varphi}(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \, d\boldsymbol{\xi}.$$

Da das Integral  $\int_{\mathbb{R}^3} \|\boldsymbol{\xi}\|^{-2} \, d\boldsymbol{\xi}$  nicht existiert, kann die Integrationsreihenfolge *nicht* vertauscht werden. Mit

$$\Delta_{\mathbf{z}} e^{i\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi} \rangle} = -\|\boldsymbol{\xi}\|^2 e^{i\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi} \rangle}$$

ergibt sich jedoch

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{v}(\boldsymbol{\xi}) \varphi(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\|\boldsymbol{\xi}\| \leq 1} \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \widehat{\varphi}(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \, d\boldsymbol{\xi} \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\|\boldsymbol{\xi}\| > 1} \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2} \int_{\mathbb{R}^3} \left( -\Delta_{\mathbf{z}} \frac{e^{i\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi} \rangle}}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2} \right) \widehat{\varphi}(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \, d\boldsymbol{\xi}, \end{aligned}$$

woraus mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \widehat{v}(\boldsymbol{\xi}) \varphi(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\|\boldsymbol{\xi}\| \leq 1} \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \widehat{\varphi}(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \, d\boldsymbol{\xi} \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\|\boldsymbol{\xi}\| > 1} \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^4} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \left( -\Delta_{\mathbf{z}} \widehat{\varphi}(\mathbf{z}) \right) \, d\mathbf{z} \, d\boldsymbol{\xi} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\|\boldsymbol{\xi}\| \leq 1} \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \widehat{\varphi}(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \, d\boldsymbol{\xi} \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left( -\Delta_{\mathbf{z}} \widehat{\varphi}(\mathbf{z}) \right) \int_{\|\boldsymbol{\xi}\| > 1} \frac{e^{i\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi} \rangle}}{\|\boldsymbol{\xi}\|^4} \, d\boldsymbol{\xi} \, d\mathbf{z} \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\widehat{\varphi}(\mathbf{z})}{(2\pi)^3} \left\{ \underbrace{\int_{\|\boldsymbol{\xi}\| \leq 1} \frac{e^{i\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi} \rangle}}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2} \, d\boldsymbol{\xi} - \Delta_{\mathbf{z}} \int_{\|\boldsymbol{\xi}\| > 1} \frac{e^{i\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi} \rangle}}{\|\boldsymbol{\xi}\|^4} \, d\boldsymbol{\xi}}_{=v(\mathbf{z})} \right\} \, d\mathbf{z}.
\end{aligned}$$

Wegen  $v(\mathbf{z}) = v(\|\mathbf{z}\|)$  genügt es, aufgrund der Erhaltung der Rotationssymmetrie (Lemma 2.20), das entsprechende Integral nur im Punkt  $(0, 0, \|\mathbf{z}\|)$  auszurechnen. Durch den Übergang zu Kugelkoordinaten

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \psi \\ \sin \phi \sin \psi \\ \cos \psi \end{bmatrix}$$

erhalten wir deshalb

$$\begin{aligned}
v(\mathbf{z}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \left\{ \int_{\|\boldsymbol{\xi}\| \leq 1} \frac{e^{i\|\mathbf{z}\|\xi_3}}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2} \, d\boldsymbol{\xi} - \Delta_{\mathbf{z}} \int_{\|\boldsymbol{\xi}\| > 1} \frac{e^{i\|\mathbf{z}\|\xi_3}}{\|\boldsymbol{\xi}\|^4} \, d\boldsymbol{\xi} \right\} \, d\mathbf{z} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 e^{ir\|\mathbf{z}\| \cos \psi} \sin \psi \, dr \, d\psi \, d\phi \right. \\
&\quad \left. - \Delta_{\mathbf{z}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_1^\infty \frac{e^{ir\|\mathbf{z}\| \cos \psi}}{r^2} \sin \psi \, dr \, d\psi \, d\phi \right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ \int_0^\pi \int_0^1 e^{ir\|\mathbf{z}\| \cos \psi} \sin \psi \, dr \, d\psi - \Delta_{\mathbf{z}} \int_0^\pi \int_1^\infty \frac{e^{ir\|\mathbf{z}\| \cos \psi}}{r^2} \sin \psi \, dr \, d\psi \right\}.
\end{aligned}$$

Die Substitution  $u := \cos \psi$  führt auf

$$\int_0^\pi e^{ir\|\mathbf{z}\| \cos \psi} \sin \psi \, d\psi = \int_{-1}^1 e^{ir\|\mathbf{z}\|u} \, du = \frac{1}{ir\|\mathbf{z}\|} \{ e^{ir\|\mathbf{z}\|} - e^{-ir\|\mathbf{z}\|} \} = \frac{2}{r\|\mathbf{z}\|} \sin(r\|\mathbf{z}\|)$$

und deshalb ist

$$v(\mathbf{z}) = \frac{1}{2\pi^2} \left\{ \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin(r\|\mathbf{z}\|)}{r\|\mathbf{z}\|} \, dr}_{=:I_1} - \Delta_{\mathbf{z}} \underbrace{\int_1^\infty \frac{\sin(r\|\mathbf{z}\|)}{r^3\|\mathbf{z}\|} \, dr}_{=:I_2} \right\}.$$

Mit der Transformation  $s = \|\mathbf{z}\|r$  ergibt sich für das erste Integral

$$I_1 = \frac{1}{\|\mathbf{z}\|} \int_0^{\|\mathbf{z}\|} \frac{\sin s}{s} \, ds = \frac{\text{Si} \|\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{z}\|}.$$

Hierin bezeichnet  $\text{Si } x = \int_0^x (\sin s)/s \, ds$  den *Integralsinus*. Mit Hilfe von

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(ax)}{x^3} \, dx &= -\frac{1}{2} \frac{\sin(ax)}{x^2} + \frac{a}{2} \int \frac{\cos(ax)}{x^2} \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\sin(ax)}{x^2} - \frac{a \cos(ax)}{2x} - \frac{a^2}{2} \int \frac{\sin(ax)}{x} \, dx \end{aligned}$$

finden wir für das zweite Integral

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[ -\frac{1}{2} \frac{\sin(r\|\mathbf{z}\|)}{r^2\|\mathbf{z}\|} - \frac{1}{2} \frac{\cos(r\|\mathbf{z}\|)}{r} \right]_{r=1}^{\infty} - \frac{\|\mathbf{z}\|}{2} \int_1^{\infty} \frac{\sin(r\|\mathbf{z}\|)}{r} \, dr \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin\|\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{z}\|} + \frac{1}{2} \cos\|\mathbf{z}\| - \frac{\|\mathbf{z}\|}{2} \left\{ \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{\sin(r\|\mathbf{z}\|)}{r} \, dr}_{=\pi/2} - \int_0^1 \frac{\sin(r\|\mathbf{z}\|)}{r} \, dr \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin\|\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{z}\|} + \frac{1}{2} \cos\|\mathbf{z}\| - \frac{\|\mathbf{z}\|}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} - \text{Si}\|\mathbf{z}\| \right\}. \end{aligned}$$

Einsetzen und Differenzieren liefert dann

$$\begin{aligned} v(\mathbf{z}) &= \frac{1}{2\pi^2} \left\{ \frac{\text{Si}\|\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{z}\|} - \Delta_{\mathbf{z}} \left[ \frac{1}{2} \frac{\sin\|\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{z}\|} + \frac{1}{2} \cos\|\mathbf{z}\| - \frac{\pi}{4}\|\mathbf{z}\| + \frac{1}{2}\|\mathbf{z}\| \text{Si}\|\mathbf{z}\| \right] \right\} \\ &= \frac{1}{8\pi} \underbrace{\Delta_{\mathbf{z}}\|\mathbf{z}\|}_{=2/\|\mathbf{z}\|} + \frac{1}{2\pi^2} \left\{ \underbrace{\frac{\text{Si}\|\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{z}\|} - \Delta_{\mathbf{z}} \left[ \frac{1}{2} \frac{\sin\|\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{z}\|} + \frac{1}{2} \cos\|\mathbf{z}\| + \frac{1}{2}\|\mathbf{z}\| \text{Si}\|\mathbf{z}\| \right]}_{=0} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\|\mathbf{z}\|}. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung** Für den allgemeinen Differentialoperator  $\mathcal{L}$  aus (4.2) lautet die Fundamentallösung

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}}{4\pi\sqrt{\det \mathbf{A}}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{\mathbf{A}^{-1}}}, & \text{falls } d = 3, \\ -\frac{1}{2\pi\sqrt{\det \mathbf{A}}} \log\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{\mathbf{A}^{-1}}, & \text{falls } d = 2 \text{ und } \lambda = 0, \\ \frac{i}{4\sqrt{\det \mathbf{A}}} H_0^{(1)}(i\lambda\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{\mathbf{A}^{-1}}), & \text{falls } d = 2 \text{ und } \lambda \neq 0, \end{cases}$$

wobei  $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{\mathbf{A}^{-1}} := \sqrt{\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \rangle}$  und  $H_0^{(1)}$  die Hankel-Funktion erster Art ist. Der Parameter  $\lambda$  ist definiert als  $\lambda = \sqrt{b}$  falls  $b \geq 0$  und  $\lambda = -i\sqrt{|b|}$  falls  $b < 0$  ist.  $\triangle$

## 5. Randintegraloperatoren

Auf einem gegebenen Lipschitz-Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  betrachten wir die Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega.$$

Gemäß Satz 4.2 lautet die zugehörige Fundamentallösung

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}, & \text{falls } d = 3, \\ -\frac{1}{2\pi} \log \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, & \text{falls } d = 2. \end{cases}$$

Mit ihrer Hilfe erhalten wir für die Lösung die Darstellungsformel

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} (\gamma_1^{int} u)(\mathbf{y}) (\gamma_{0,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} \\ - \int_{\Gamma} (\gamma_0^{int} u)(\mathbf{y}) (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega} f(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Für die Herleitung von geeigneten Randintegralgleichungen zur Bestimmung der Cauchy-Daten müssen wir zunächst die auftretenden Rand- und Volumenpotentiale untersuchen.

### 5.1 Newton-Potential

**Definition 5.1** Das **Newton-Potential** oder **Volumenpotential** einer Funktion  $f$  auf dem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ist gegeben als

$$(\tilde{\mathcal{N}}f)(\mathbf{x}) := \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \quad (5.1)$$

**Satz 5.2** Das Newton-Potential (5.1) ist stetig als Operator  $\tilde{\mathcal{N}} : \tilde{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ .

*Beweis.* Wir beschränken uns nur auf den Fall  $d = 3$ , da der Beweis im Fall  $d = 2$  analog verläuft. Für  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  gilt

$$\|\varphi\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^3)}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})|^2}{1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^2} d\boldsymbol{\xi}$$

mit

$$\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Wegen  $\text{supp } \varphi \subset \Omega$  folgt weiter

$$\|\varphi\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^3)} = \sup_{v \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}} \frac{(\varphi, v)_{\mathbb{R}^3}}{\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}} \leq \sup_{v \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{(\varphi, v)_{\Omega}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} = \|\varphi\|_{\widetilde{H}^{-1}(\Omega)}.$$

Wähle nun  $R > 0$  derart, dass  $\Omega \subset B_R(\mathbf{0})$ , und definiere  $\mu \in W^{1,\infty}([0, \infty))$  durch

$$\mu(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq 2R, \\ \frac{3R-r}{R}, & 2R \leq r \leq 3R, \\ 0, & r \geq 3R. \end{cases}$$

Setzen wir

$$u_{\mu}(\mathbf{x}) := \int_{\Omega} \mu(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

und beachten, dass  $\mu(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) = 1$  für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$  gilt, so folgt

$$u_{\mu}(\mathbf{x}) = (\widetilde{\mathcal{N}}\varphi)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \Omega.$$

Insbesondere ist

$$\|\widetilde{\mathcal{N}}\varphi\|_{H^1(\Omega)} = \|u_{\mu}\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u_{\mu}\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \quad (5.2)$$

mit

$$\|u_{\mu}\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} (1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^2) |\widehat{u}_{\mu}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi}.$$

Weil  $\varphi(\mathbf{y}) = 0$  ist für alle  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ , berechnet sich die Fourier-Transformierte gemäß

$$\begin{aligned} \widehat{u}_{\mu}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} u_{\mu}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \int_{\mathbb{R}^3} \mu(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\langle \mathbf{z} + \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \mu(\|\mathbf{z}\|) G(\mathbf{z} + \mathbf{y}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{z} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\langle \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \varphi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \mu(\|\mathbf{z}\|) G(\mathbf{z}, \mathbf{0}) \, d\mathbf{z} \\ &= \underbrace{\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\langle \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \mu(\|\mathbf{z}\|) G(\mathbf{z}, \mathbf{0}) \, d\mathbf{z}}_{=: I(\boldsymbol{\xi})}. \end{aligned}$$

Da die Funktion  $\mu(\|\mathbf{z}\|)G(\mathbf{z}, \mathbf{0})$  nur von  $\|\mathbf{z}\|$  abhängt, also rotationssymmetrisch ist, folgt mit Hilfe von Kugelkoordinaten

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \psi \\ \sin \phi \sin \psi \\ \cos \psi \end{bmatrix}$$

nach Lemma 2.20

$$\begin{aligned}
I(\boldsymbol{\xi}) &= I(0, 0, \|\boldsymbol{\xi}\|) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-iz_3\|\boldsymbol{\xi}\|} \mu(\|\mathbf{z}\|) G(\mathbf{z}, \mathbf{0}) \, d\mathbf{z} \\
&= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-ir\|\boldsymbol{\xi}\|\cos\psi} \frac{\mu(r)}{4\pi r} r^2 \sin\psi \, d\psi \, d\phi \, dr \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty r\mu(r) \int_0^\pi e^{-ir\|\boldsymbol{\xi}\|\cos\psi} \sin\psi \, d\psi \, dr.
\end{aligned}$$

Mit der Substitution  $u := -\cos\psi$  erhalten wir daher

$$\begin{aligned}
I(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty r\mu(r) \int_{-1}^1 e^{-ir\|\boldsymbol{\xi}\|u} \, du \, dr \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{r\mu(r)}{ir\|\boldsymbol{\xi}\|} \{e^{ir\|\boldsymbol{\xi}\|} - e^{-ir\|\boldsymbol{\xi}\|}\} \, dr \\
&= \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \int_0^\infty \mu(r) \sin(r\|\boldsymbol{\xi}\|) \, dr.
\end{aligned}$$

Im Fall  $\|\boldsymbol{\xi}\| \geq 1$  ergibt sich

$$\begin{aligned}
|I(\boldsymbol{\xi})| &= \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \left| \int_0^\infty \mu(r) \sin(r\|\boldsymbol{\xi}\|) \, dr \right| \\
&\leq \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \left\{ \underbrace{\left| \int_0^{2R} \sin(r\|\boldsymbol{\xi}\|) \, dr \right|}_{\leq 2/\|\boldsymbol{\xi}\|} + \left| \int_0^R \frac{R-r}{R} \sin(2R+r\|\boldsymbol{\xi}\|) \, dr \right| \right\} \\
&\leq \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \left\{ \frac{2}{\|\boldsymbol{\xi}\|} + \underbrace{\left| \left[ \frac{R-r}{R\|\boldsymbol{\xi}\|} \cos(2R+r\|\boldsymbol{\xi}\|) \right]_{r=0}^R \right|}_{\leq 1/\|\boldsymbol{\xi}\|} + \frac{1}{R\|\boldsymbol{\xi}\|} \underbrace{\left| \int_0^R \cos(2R+r\|\boldsymbol{\xi}\|) \, dr \right|}_{\leq R} \right\} \\
&\leq \frac{c_1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2}.
\end{aligned}$$

Wegen

$$(1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^2)^2 = 1 + 2\|\boldsymbol{\xi}\|^2 + \|\boldsymbol{\xi}\|^4 \leq 4\|\boldsymbol{\xi}\|^4 \quad \text{für } \|\boldsymbol{\xi}\| \geq 1,$$

folgt daher

$$\begin{aligned}
\int_{\|\boldsymbol{\xi}\| \geq 1} (1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^2) |\widehat{u}_\mu(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} &= \int_{\|\boldsymbol{\xi}\| \geq 1} (1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^2) |I(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \\
&\leq c_1^2 \int_{\|\boldsymbol{\xi}\| \geq 1} \frac{1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^2}{\|\boldsymbol{\xi}\|^4} |\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \\
&\leq 4c_1^2 \int_{\|\boldsymbol{\xi}\| \geq 1} \frac{1}{1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^2} |\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \\
&\leq 4c_1^2 \|\varphi\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^3)}^2.
\end{aligned}$$

Im Fall  $\|\boldsymbol{\xi}\| \leq 1$  finden wir

$$|I(\boldsymbol{\xi})| = \left| \int_0^\infty r\mu(r) \frac{\sin(r\|\boldsymbol{\xi}\|)}{r\|\boldsymbol{\xi}\|} \, dr \right| \leq c_2$$

und weiter

$$\begin{aligned}
\int_{\|\boldsymbol{\xi}\| \leq 1} (1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^2) |\widehat{u}_\mu(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} &= \int_{\|\boldsymbol{\xi}\| \leq 1} \underbrace{(1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^2)}_{\leq 2} |I(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \\
&\leq 2c_2^2 \int_{\|\boldsymbol{\xi}\| \leq 1} |\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \\
&\leq 4c_2^2 \int_{\|\boldsymbol{\xi}\| \leq 1} \underbrace{\frac{1}{1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^2}}_{\geq 1/2} |\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \\
&\leq 4c_2^2 \|\varphi\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^3)}^2.
\end{aligned}$$

Die Summation der beiden Abschätzungen ergibt wegen (5.2) und  $\|\varphi\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^3)} \leq \|\varphi\|_{\widetilde{H}^{-1}(\Omega)}$  die Abschätzung

$$\|\widetilde{\mathcal{N}}\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|u_\mu\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} (1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^2) |\widehat{u}_\mu(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \leq 4(c_1^2 + c_2^2) \|\varphi\|_{\widetilde{H}^{-1}(\Omega)}^2.$$

Die Vervollständigung des  $C_0^\infty(\Omega)$  bezüglich der  $H^{-1}(\mathbb{R}^3)$ -Norm liefert schließlich die Behauptung.  $\square$

**Satz 5.3** Für  $f \in \widetilde{H}^{-1}(\Omega)$  gilt

$$-\Delta(\widetilde{\mathcal{N}}f) = f \quad \text{auf } \Omega.$$

*Beweis.* Wir setzen

$$\widetilde{f}(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{für } \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0, & \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Für  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  folgt dann

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} [-\Delta_{\mathbf{x}}(\widetilde{\mathcal{N}}f)(\mathbf{x})] \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^d} (\widetilde{\mathcal{N}}f)(\mathbf{x}) [-\Delta_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x})] d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \widetilde{f}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} [-\Delta_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x})] d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{f}(\mathbf{y}) \int_{\mathbb{R}^d} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [-\Delta_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x})] d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{f}(\mathbf{y}) \int_{\mathbb{R}^d} [-\Delta_{\mathbf{x}}G(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{f}(\mathbf{y}) \int_{\mathbb{R}^d} \delta_0(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{f}(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.
\end{aligned}$$

Die Vervollständigung des  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  bezüglich der  $H^1(\mathbb{R}^d)$ -Norm ergibt die Gleichung  $-\Delta(\widetilde{\mathcal{N}}f) = \widetilde{f}$  im Sinne des  $H^{-1}(\mathbb{R}^d)$ . Mit Hilfe der Restriktion of  $\Omega$  erhalten wir die Behauptung.  $\square$

Wir benötigen später noch die folgenden zwei Sätze die Spur und die Konormalenableitung des Newton-Potentials (5.1) betreffend.

**Satz 5.4** Sei

$$\mathcal{N}_0 := \gamma_0^{int} \tilde{\mathcal{N}} : \tilde{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$$

und  $f \in L^\infty(\Omega)$ . Dann ist

$$(\mathcal{N}_0 f)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma$$

im Sinne eines schwach singulären Integrals.

*Beweis.* Für ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  seien  $\mathbf{z} \in \Omega$  und  $\mathbf{x} \in \Gamma$  so gewählt, dass  $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < \varepsilon$ . Dann ist

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - \int_{\mathbf{y} \in \Omega: \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \varepsilon} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right| \\ & \leq \left| \int_{\mathbf{y} \in \Omega: \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \varepsilon} \{G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right| + \left| \int_{\mathbf{y} \in \Omega: \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \varepsilon} G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right|. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\lim_{\Omega \ni \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma} \left| \int_{\mathbf{y} \in \Omega: \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \varepsilon} \underbrace{\{G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}}_{\rightarrow 0} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right| = 0$$

und

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbf{y} \in \Omega: \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \varepsilon} G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right| & \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}))} \int_{\Omega \cap B_\varepsilon(\mathbf{x})} |G(\mathbf{z}, \mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \\ & \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{B_{2\varepsilon}(\mathbf{z})} |G(\mathbf{z}, \mathbf{y})| \, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Für  $d = 2$  ergibt sich mit Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \int_{B_{2\varepsilon}(\mathbf{z})} |G(\mathbf{z}, \mathbf{y})| \, d\mathbf{y} & = -\frac{1}{2\pi} \int_{\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \leq 2\varepsilon} \log \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \, d\mathbf{y} \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\varepsilon} |\log r| r \, dr \, d\phi \\ & = \varepsilon^2 \{1 - 2 \log(2\varepsilon)\}. \end{aligned}$$

Analog folgt für  $d = 3$  mit Hilfe von Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \int_{B_{2\varepsilon}(\mathbf{z})} |G(\mathbf{z}, \mathbf{y})| \, d\mathbf{y} & = \frac{1}{4\pi} \int_{\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \leq 2\varepsilon} \frac{1}{\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|} \, d\mathbf{y} \\ & = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\varepsilon} \frac{1}{r} r^2 \sin \psi \, dr \, d\phi \, d\psi \\ & = 2\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Für  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x}$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  erhalten wir damit die Behauptung. □



**Satz 5.5** Die Abbildung

$$\mathcal{N}_1 := \gamma_1^{\text{int}} \tilde{\mathcal{N}} : \tilde{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$$

ist stetig, das heißt, es gilt

$$\|\mathcal{N}_1 f\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq c \|f\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)}.$$

*Beweis.* Die Funktion  $u = \tilde{\mathcal{N}}f \in H^1(\Omega)$  erfüllt in  $\Omega$  nach Satz 5.3 die Gleichung  $-\Delta u = f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$ . Für beliebiges  $v \in H^{1/2}(\Gamma)$  existiert nach dem inversen Spursatz 2.29 eine Fortsetzung  $\mathcal{E}v \in H^1(\Omega)$  mit

$$\|\mathcal{E}v\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Aufgrund der ersten Greenschen Formel

$$(\gamma_1^{\text{int}} u, v)_\Gamma = \int_\Omega \langle \nabla u(\mathbf{x}), \nabla(\mathcal{E}v)(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x} - (f, \mathcal{E}v)_\Omega$$

und Satz 5.2 folgt

$$\begin{aligned} |(\gamma_1^{\text{int}} u, v)_\Gamma| &\leq \{ \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)} \} \|\mathcal{E}v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq (c+1) \|f\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)} \|\mathcal{E}v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar das Behauptete.  $\square$

## 5.2 Einfachschichtpotential und Einfachschichtoperator

**Definition 5.6** Das **Einfachschichtpotential** ist definiert durch

$$(\tilde{\mathcal{V}}\rho)(\mathbf{x}) := \int_\Gamma G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

mit der **Dichte**  $\rho \in H^{-1/2}(\Gamma)$ .

**Lemma 5.7** Die Funktion  $u = \tilde{\mathcal{V}}\rho$  ist Lösung der *Laplace-Gleichung*  $\Delta u = 0$  in  $\Omega \cup \Omega^c$ . Für  $\rho \in H^{-1/2}(\Gamma)$  gilt  $u \in H^1(\Omega)$  mit

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|\tilde{\mathcal{V}}\rho\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|\rho\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}.$$

*Beweis.* Für  $\mathbf{x} \in \Omega \cup \Omega^c$  und  $\mathbf{y} \in \Gamma$  ist  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  beliebig oft differenzierbar. Daher folgt

$$\Delta_{\mathbf{x}} \int_\Gamma G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} = \int_\Gamma \underbrace{\Delta_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}_{=0} \rho(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} = 0.$$

Für  $\varphi \in C^\infty(\Omega)$  ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{\Gamma} \rho(\mathbf{y}) \underbrace{\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}_{=(\gamma_0^{int}\tilde{\mathcal{N}}\varphi)(\mathbf{y})} \, d\sigma_{\mathbf{y}} \\ &= \int_{\Gamma} \rho(\mathbf{y})(\gamma_0^{int}\tilde{\mathcal{N}}\varphi)(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \\ &\leq \|\rho\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|\gamma_0^{int}\tilde{\mathcal{N}}\varphi\|_{H^1(\Gamma)} \\ &\leq c_{\Gamma} \|\rho\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|\tilde{\mathcal{N}}\varphi\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

woraus das Behauptete durch Vervollständigung bezüglich der  $\tilde{H}^{-1}(\mathbb{R}^d)$ -Norm folgt.  $\square$

**Definition 5.8** Der Operator

$$\mathcal{V} := \gamma_0^{int}\tilde{\mathcal{V}} : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Gamma).$$

heißt **Einfachschichtoperator**.

Nach Lemma 5.7 ist das Einfachschichtpotential eine stetige lineare Abbildung

$$\tilde{\mathcal{V}} : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega).$$

Daher liefert die Anwendung des Spuoperators auf  $\tilde{\mathcal{V}}\rho \in H^1(\Omega)$  eine stetige Abbildung

$$\gamma_0^{int}\tilde{\mathcal{V}} : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Gamma),$$

das heißt, der Einfachschichtoperator ist stetig:

$$\|\mathcal{V}\rho\|_{H^1(\Gamma)} \leq c\|\rho\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } \rho \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

**Lemma 5.9** Sei  $\rho \in L^\infty(\Gamma)$ . Dann gilt für den Einfachschichtoperator die Darstellung

$$(\mathcal{V}\rho)(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma$$

als schwach singuläres Integral.

*Beweis.* Für ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  seien  $\mathbf{x} \in \Gamma$  und  $\mathbf{z} \in \Omega$  mit  $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < \varepsilon$ . Dann ist

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Gamma} G(\mathbf{z}, \mathbf{y})\rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} - \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \varepsilon} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \varepsilon} \{G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}\rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \right| + \left| \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \varepsilon} G(\mathbf{z}, \mathbf{y})\rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \right|. \end{aligned}$$

Für den ersten Term erhalten wir

$$\lim_{\Omega \ni \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma} \left| \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \varepsilon} \{G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}\rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \right| = 0,$$

während für den zweiten Term folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leq \varepsilon} G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \right| &\leq \|\rho\|_{L^\infty(\Gamma \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}))} \int_{\Gamma \cap B_\varepsilon(\mathbf{x})} |G(\mathbf{z}, \mathbf{y})| \, d\sigma_{\mathbf{y}} \\ &\leq \|\rho\|_{L^\infty(\Gamma)} \int_{\Gamma \cap B_{2\varepsilon}(\mathbf{z})} |G(\mathbf{z}, \mathbf{y})| \, d\sigma_{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Der Integrand ist durch  $\mathcal{O}(|\log r|)$  beziehungsweise  $\mathcal{O}(1/r)$  beschränkt. Damit haben wir

$$\int_{\Gamma \cap B_{2\varepsilon}(\mathbf{z})} |G(\mathbf{z}, \mathbf{y})| \, d\sigma_{\mathbf{y}} \leq c \int_0^{2\varepsilon} |\log r| \, dr = 2\varepsilon \{1 - \log(2\varepsilon)\} c$$

im Fall  $d = 2$  und

$$\int_{\Gamma \cap B_{2\varepsilon}(\mathbf{z})} |G(\mathbf{z}, \mathbf{y})| \, d\sigma_{\mathbf{y}} \leq c \int_0^{2\pi} \int_0^{2\varepsilon} \frac{1}{r} \, dr \, d\phi = 4\pi\varepsilon c$$

im Fall  $d = 3$ . Schließlich ergibt sich die Behauptung wie im Beweis von Satz 5.4 durch den Grenzübergang  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x}$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $\square$

Für die äußere Spurbildung erhalten wir analog

$$(\mathcal{V}\rho)(\mathbf{x}) = (\gamma_0^{ext} \tilde{\mathcal{V}}\rho)(\mathbf{x}) = \lim_{\Omega^c \ni \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma} (\tilde{\mathcal{V}}\rho)(\mathbf{z}) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Deshalb ergibt sich die folgende *Sprungbedingung* für das Einfachschichtpotential

$$[\gamma_0 \tilde{\mathcal{V}}\rho](\mathbf{x}) := (\gamma_0^{ext} \tilde{\mathcal{V}}\rho)(\mathbf{x}) - (\gamma_0^{int} \tilde{\mathcal{V}}\rho)(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \Gamma.$$

## 5.3 Adjungierter Doppelschichtoperator

Für gegebenes  $\rho \in H^{-1/2}(\Gamma)$  löst nach Lemma 5.7 die Funktion  $\tilde{\mathcal{V}}\rho \in H^1(\Omega)$  die Laplace-Gleichung. Insbesondere ist die innere Konormalenableitung des Einfachschichtpotentials

$$\gamma_1^{int} \tilde{\mathcal{V}} : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$$

wohldefiniert und beschränkt.

**Lemma 5.10** Für  $\rho \in H^{-1/2}(\Gamma)$  gilt

$$(\gamma_1^{int} \tilde{\mathcal{V}}\rho)(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}) + (\mathcal{K}^*\rho)(\mathbf{x})$$

im Sinne des  $H^{-1/2}(\Gamma)$ . Hierin ist

$$(\mathcal{K}^*\rho)(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq \varepsilon} (\gamma_{1,\mathbf{x}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (5.3)$$

und

$$\sigma(\mathbf{x}) = \frac{1}{2(d-1)\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{y} \in \Omega: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^{d-1}} \, d\sigma, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (5.4)$$

*Beweis.* Für  $\varphi \in C^\infty(\Omega)$  folgt aus der ersten Greenschen Formel

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} (\gamma_1^{int} \tilde{\mathcal{V}}\rho)(\mathbf{x})(\gamma_0^{int} \varphi)(\mathbf{x}) \, d\sigma_{\mathbf{x}} \\
&= \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{x}}(\tilde{\mathcal{V}}\rho)(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
&= \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{x}} \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \nabla_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
&= \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{x}} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq \varepsilon} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \right\} \nabla_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
&= \int_{\Gamma} \rho(\mathbf{y}) \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{x} \in \Omega: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq \varepsilon} \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right\} d\sigma_{\mathbf{y}}.
\end{aligned}$$

Erneutes Anwenden der ersten Greenschen Formel liefert für  $\mathbf{y} \in \Gamma$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{x} \in \Omega: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq \varepsilon} \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{\mathbf{x} \in \Gamma: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq \varepsilon} (\gamma_{1,\mathbf{x}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\gamma_0^{int} \varphi)(\mathbf{x}) \, d\sigma_{\mathbf{x}} \\
&\quad + \int_{\mathbf{x} \in \Omega: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \varepsilon} (\gamma_{1,\mathbf{x}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\sigma_{\mathbf{x}}.
\end{aligned}$$

Der erste Summand entspricht später (5.3). Den zweiten Summanden spalten wir auf gemäß

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{x} \in \Omega: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \varepsilon} (\gamma_{1,\mathbf{x}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\sigma_{\mathbf{x}} &= \int_{\mathbf{x} \in \Omega: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \varepsilon} (\gamma_{1,\mathbf{x}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \{ \varphi(\mathbf{x}) - (\gamma_0^{int} \varphi)(\mathbf{y}) \} \, d\sigma_{\mathbf{x}} \\
&\quad + (\gamma_0^{int} \varphi)(\mathbf{y}) \int_{\mathbf{x} \in \Omega: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \varepsilon} (\gamma_{1,\mathbf{x}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{x}}.
\end{aligned}$$

Die innere Normale im Punkt  $\mathbf{x} \in \partial B_\varepsilon(\mathbf{y})$  an die Kugel  $B_\varepsilon(\mathbf{y})$  ist gegeben durch  $\mathbf{n}_{\mathbf{x}} = (\mathbf{y} - \mathbf{x})/\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ . Wegen  $\nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y} - \mathbf{x})/(2(d-1)\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^d)$  folgt daher

$$(\gamma_{1,\mathbf{x}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{n}_{\mathbf{x}} \rangle = \frac{1}{2(d-1)\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{d-1}}, \quad \mathbf{x} \in \partial B_\varepsilon(\mathbf{y}) \cap \Omega,$$

und weiter

$$\int_{\mathbf{x} \in \Omega: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \varepsilon} (\gamma_{1,\mathbf{x}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{x}} = \frac{1}{2(d-1)\pi} \int_{\mathbf{x} \in \Omega: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^{d-1}} \, d\sigma_{\mathbf{x}}.$$

Mit

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbf{x} \in \Omega: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \varepsilon} (\gamma_{1,\mathbf{x}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \{ \varphi(\mathbf{x}) - (\gamma_0^{int} \varphi)(\mathbf{y}) \} \, d\sigma_{\mathbf{x}} \right| \\
&\leq \max_{\mathbf{x} \in \Omega: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \varepsilon} |\varphi(\mathbf{x}) - (\gamma_0^{int} \varphi)(\mathbf{y})| \int_{\mathbf{x} \in \Omega: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \varepsilon} |(\gamma_{1,\mathbf{x}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \, d\sigma_{\mathbf{x}} \\
&\leq \max_{\mathbf{x} \in \Omega: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \varepsilon} |\varphi(\mathbf{x}) - (\gamma_0^{int} \varphi)(\mathbf{y})| \underbrace{\frac{1}{2(d-1)\pi} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^{d-1}} \, d\sigma_{\mathbf{x}}}_{=1}
\end{aligned}$$

ergibt sich außerdem

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathbf{x} \in \Omega: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\varepsilon} (\gamma_{1,\mathbf{x}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \{ \varphi(\mathbf{x}) - (\gamma_0^{int} \varphi)(\mathbf{y}) \} d\sigma_{\mathbf{x}} \right| = 0.$$

Insgesamt erhalten wir also im Hinblick auf (5.3) und (5.4)

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (\gamma_1^{int} \tilde{\mathcal{V}}\rho)(\mathbf{x}) (\gamma_0^{int} \varphi)(\mathbf{x}) d\sigma_{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\Gamma} \rho(\mathbf{y}) \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{x} \in \Gamma: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq \varepsilon} (\gamma_{1,\mathbf{x}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\gamma_0^{int} \varphi)(\mathbf{x}) d\sigma_{\mathbf{x}} + \sigma(\mathbf{y}) (\gamma_0^{int} \varphi)(\mathbf{y}) \right\} d\sigma_{\mathbf{y}} \\ &= \int_{\Gamma} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq \varepsilon} (\gamma_{1,\mathbf{x}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} \right\} (\gamma_0^{int} \varphi)(\mathbf{x}) d\sigma_{\mathbf{x}} \\ & \quad + \int_{\Gamma} \rho(\mathbf{y}) \sigma(\mathbf{y}) (\gamma_0^{int} \varphi)(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} \\ &= \int_{\Gamma} \{ (\mathcal{K}^* \rho)(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) \} (\gamma_0^{int} \varphi)(\mathbf{x}) d\sigma_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Dies beweist aufgrund der Dichtheit von  $C^\infty(\Omega)$  in  $H^1(\Omega)$  die zu zeigende Identität.  $\square$

**Bemerkung** Ist der Rand  $\Gamma$  in der Umgebung des Punktes  $\mathbf{x} \in \Gamma$  glatt, das heißt, wenigstens differenzierbar, so folgt aus (5.4)  $\sigma(\mathbf{x}) = 1/2$ . Auf einem Lipschitz-Rand ist daher

$$\sigma(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \quad \text{für fast alle } \mathbf{x} \in \Gamma.$$

$\triangle$

**Definition 5.11** Der durch (5.3) definierte Operator

$$\mathcal{K}^* : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$$

wird als **adjungierter Doppelschichtoperator** bezeichnet.

Als Folge von Lemma 5.10 ist der adjungierte Doppelschichtoperator stetig:

$$\|\mathcal{K}^* \rho\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq c \|\rho\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } \rho \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Ferner zeigt man für die äußere Konormalenableitung in vollständiger Analogie zum Beweis von Lemma 5.10 die Darstellung

$$(\gamma_1^{ext} \tilde{\mathcal{V}}\rho)(\mathbf{x}) = \{ \sigma(\mathbf{x}) - 1 \} \rho(\mathbf{x}) + (\mathcal{K}^* \rho)(\mathbf{x}) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \Gamma.$$

im Sinne des  $H^{-1/2}(\Gamma)$ . Folglich erfüllt die Konormalenableitung des Einfachschichtpotentials die Sprungbedingung

$$[\gamma_1 \tilde{\mathcal{V}}\rho](\mathbf{x}) := (\gamma_1^{ext} \tilde{\mathcal{V}}\rho)(\mathbf{x}) - (\gamma_1^{int} \tilde{\mathcal{V}}\rho)(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x}) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \Gamma.$$

## 5.4 Doppelschichtpotential und Doppelschichtoperator

**Definition 5.12** Für die Dichte  $\rho \in H^{1/2}(\Gamma)$  ist das **Doppelschichtpotential** definiert durch

$$(\tilde{\mathcal{K}}\rho)(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

**Lemma 5.13** Die Funktion  $u = \tilde{\mathcal{K}}\rho$  ist Lösung der Laplace-Gleichung  $\Delta u = 0$  in  $\Omega \cup \Omega^c$ . Für  $\rho \in H^{1/2}(\Gamma)$  gilt  $u \in H^1(\Omega)$  mit

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|\tilde{\mathcal{K}}\rho\|_{H^1(\Omega)} \leq c\|\rho\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

*Beweis.* Für  $\mathbf{x} \in \Omega \cup \Omega^c$  und  $\mathbf{y} \in \Gamma$  ist stets  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ . Deshalb sind die Anwendung des Differentialoperators, die Bildung der Konormalenableitung und die Integration vertauschbar, woraus aufgrund der Eigenschaften der Fundamentallösung der erste Teil der Behauptung folgt.

Um den zweiten Teil der Behauptung zu zeigen, seien  $\rho \in H^{1/2}(\Gamma)$  und  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  beliebig gewählt. Mit  $u = \tilde{\mathcal{K}}\rho$  gilt dann

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \int_{\Gamma} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Gamma} \rho(\mathbf{y}) \underbrace{\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}_{=(\gamma_1^{int} \tilde{\mathcal{N}}\varphi)(\mathbf{y})} d\sigma_{\mathbf{y}} \\ &= \int_{\Gamma} \rho(\mathbf{y}) (\gamma_1^{int} \tilde{\mathcal{N}}\varphi)(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Durch Vervollständigung von  $C_0^\infty(\Omega)$  bezüglich des  $\tilde{H}^{-1}(\Omega)$  erhalten wir folglich für alle  $f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$  die Identität

$$(u, f)_{\Omega} = (\rho, \gamma_1^{int} \tilde{\mathcal{N}}f)_{\Gamma}.$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfe von Satz 5.5 die gesuchte Abschätzung:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sup_{f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{(u, f)_{\Omega}}{\|f\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)}} = \sup_{f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{(\rho, \gamma_1^{int} \tilde{\mathcal{N}}f)_{\Gamma}}{\|f\|_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)}} \leq c\|\rho\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

□

Gemäß diesem Resultat ist das Doppelschichtpotential eine stetige lineare Abbildung

$$\tilde{\mathcal{K}} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega).$$

Deshalb ergibt die Anwendung des Spuoperators auf  $\tilde{\mathcal{K}}\rho \in H^1(\Omega)$  eine stetige Abbildung

$$\gamma_0^{int} \tilde{\mathcal{K}} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma).$$

**Lemma 5.14** Für  $\rho \in H^{1/2}(\Gamma)$  gilt die Identität

$$(\gamma_0^{int} \tilde{\mathcal{K}}\rho)(\mathbf{x}) = \{\sigma(\mathbf{x}) - 1\}\rho(\mathbf{x}) + (\mathcal{K}\rho)(\mathbf{x}) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \Gamma,$$

wobei

$$(\mathcal{K}\rho)(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq \varepsilon} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (5.5)$$

und  $\sigma(\mathbf{x})$  die durch (5.4) gegebene Größe ist.

*Beweis.* Für ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  bezeichne

$$(\mathcal{K}_\varepsilon \rho)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq \varepsilon} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Ferner seien  $\mathbf{x} \in \Gamma$  und  $\mathbf{z} \in \Omega$  mit  $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < \varepsilon$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{K}}\rho)(\mathbf{z}) - (\mathcal{K}_\varepsilon \rho)(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq \varepsilon} \{(\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \\ &\quad + \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leq \varepsilon} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \\ &= \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq \varepsilon} \{(\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \\ &\quad + \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leq \varepsilon} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \{\rho(\mathbf{y}) - \rho(\mathbf{x})\} \, d\sigma_{\mathbf{y}} \\ &\quad + \rho(\mathbf{x}) \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leq \varepsilon} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Für alle  $\varepsilon > 0$  ist

$$\lim_{\Omega \ni \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma} \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq \varepsilon} \{(\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} = 0.$$

Um das zweite Integral abzuschätzen, beachten wir, dass wegen  $\nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = (\mathbf{z} - \mathbf{y}) / (2(d-1)\pi \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|^d)$  folgt

$$|(\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{z}, \mathbf{y})| = \frac{|\langle \mathbf{n}_{\mathbf{y}}, \mathbf{z} - \mathbf{y} \rangle|}{2(d-1)\pi \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|^d} \leq \frac{1}{2(d-1)\pi \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|^{d-1}}.$$

Weil  $\rho \in H^{1/2}(\Gamma)$  ist, können wir deshalb das zweite Integral mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung beschränken

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leq \varepsilon} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \{\rho(\mathbf{y}) - \rho(\mathbf{x})\} \, d\sigma_{\mathbf{y}} \right| \\ &\leq c \underbrace{\left( \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leq \varepsilon} \frac{|\rho(\mathbf{x}) - \rho(\mathbf{y})|^2}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|^d} \, d\sigma_{\mathbf{y}} \right)^{1/2}}_{=: v(\mathbf{x}) \in L^2(\Gamma)} \underbrace{\left( \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leq \varepsilon} \frac{1}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|^{d-2}} \, d\sigma_{\mathbf{y}} \right)^{1/2}}_{=: \mathcal{O}(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Somit verschwindet das zweite Integral beim Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Das dritte Integral formen wir nochmals um:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \varepsilon} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} &= \int_{\mathbf{y} \in \partial(\Omega \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}))} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \\ &\quad - \int_{\mathbf{y} \in \Omega: \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \varepsilon} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Hierin gilt wegen der ersten Greenschen Formel

$$\int_{\mathbf{y} \in \partial(\Omega \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}))} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} = \int_{\Omega \cap B_\varepsilon(\mathbf{x})} \left\{ \langle \nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{z}, \mathbf{y}), \underbrace{\nabla \mathbf{1}}_{=0} \rangle + \underbrace{\Delta_{\mathbf{y}} G(\mathbf{z}, \mathbf{y})}_{=-\delta_0(\mathbf{z} - \mathbf{y})} \right\} \, d\mathbf{y} = -1.$$

Die äußere Normale im Punkt  $\mathbf{y} \in \partial B_\varepsilon(\mathbf{x})$  an die Kugel  $B_\varepsilon(\mathbf{x})$  ist gegeben durch  $\mathbf{n}_{\mathbf{y}} = (\mathbf{y} - \mathbf{x}) / \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ . Mit  $\nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = (\mathbf{z} - \mathbf{y}) / (2(d-1)\pi \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|^d)$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{\Omega \ni \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{z}, \mathbf{y}) &= \lim_{\Omega \ni \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma} \langle \nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{z}, \mathbf{y}), \mathbf{n}_{\mathbf{y}} \rangle \\ &= -\frac{1}{2(d-1)\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{d-1}}, \quad \mathbf{y} \in \partial B_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap \Omega, \end{aligned}$$

und deshalb ist

$$\lim_{\Omega \ni \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma} \int_{\mathbf{y} \in \Omega: \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \varepsilon} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} = -\frac{1}{2(d-1)\pi} \int_{\mathbf{y} \in \Omega: \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^{d-1}} \, d\sigma_{\mathbf{y}} = -\sigma(\mathbf{x}).$$

Folglich haben wir auch noch gezeigt, dass

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\Omega \ni \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma} \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \varepsilon} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} = \sigma(\mathbf{x}) - 1$$

ist, womit der Beweis des Lemmas vollständig erbracht ist.  $\square$

**Definition 5.15** Der durch (5.5) definierte Operator

$$\mathcal{K} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$$

heißt **Doppelschichtoperator**.

Aus Lemma 5.14 folgt, dass der Doppelschichtoperator stetig ist

$$\|\mathcal{K}\rho\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq c\|\rho\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } \rho \in H^{1/2}(\Gamma).$$

Speziell finden wir für alle  $\rho \in H^{1/2}(\Gamma)$  und  $\mu \in H^{-1/2}(\Gamma)$  wegen der Symmetrie  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  der Greenschen Funktion

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}\rho, \mu)_\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Gamma \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \varepsilon} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \mu(\mathbf{x}) \, d\sigma_{\mathbf{x}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Gamma \int_{\mathbf{x} \in \Gamma: \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \varepsilon} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \mu(\mathbf{x}) \, d\sigma_{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \\ &= (\rho, \mathcal{K}^* \mu)_\Gamma. \end{aligned}$$



Dies bedeutet, dass  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{K}^*$  tatsächlich zueinander adjungiert sind.

Genauso wie im Beweis von Lemma 5.14 weist man nach, dass für die äußere Konormalenableitung die Darstellung

$$(\gamma_0^{ext} \tilde{\mathcal{K}}\rho)(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}) + (\mathcal{K}\rho)(\mathbf{x}) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \Gamma$$

gilt. Hiermit erfüllt das Doppelschichtpotential die Sprungbedingung

$$[\gamma_0 \tilde{\mathcal{K}}\rho](\mathbf{x}) = (\gamma_0^{ext} \tilde{\mathcal{K}}\rho)(\mathbf{x}) - (\gamma_0^{int} \tilde{\mathcal{K}}\rho)(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \Gamma.$$

**Lemma 5.16** Für den Sprung der Konormalenableitung des Doppelschichtpotentials gilt

$$[\gamma_1 \tilde{\mathcal{K}}\rho](\mathbf{x}) = (\gamma_1^{ext} \tilde{\mathcal{K}}\rho)(\mathbf{x}) - (\gamma_1^{int} \tilde{\mathcal{K}}\rho)(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \Gamma.$$

*Beweis.* Einerseits folgt für beliebiges  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  aus der zweiten Greenschen Formel

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cup \Omega^c} (\tilde{\mathcal{K}}\rho)(\mathbf{x}) \Delta \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \underbrace{\Delta(\tilde{\mathcal{K}}\rho)(\mathbf{x})}_{=0} \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega^c} \underbrace{\Delta(\tilde{\mathcal{K}}\rho)(\mathbf{x})}_{=0} \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Gamma} [\gamma_1 \tilde{\mathcal{K}}\rho](\mathbf{x}) (\gamma_0^{int} \varphi)(\mathbf{x}) \, d\sigma_{\mathbf{x}} - \int_{\Gamma} \underbrace{[\gamma_0 \tilde{\mathcal{K}}\rho](\mathbf{x})}_{=\rho(\mathbf{x})} (\gamma_1^{int} \varphi)(\mathbf{x}) \, d\sigma_{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\Gamma} [\gamma_1 \tilde{\mathcal{K}}\rho](\mathbf{x}) (\gamma_0^{int} \varphi)(\mathbf{x}) \, d\sigma_{\mathbf{x}} - \int_{\Gamma} \rho(\mathbf{x}) (\gamma_1^{int} \varphi)(\mathbf{x}) \, d\sigma_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt aber auch

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cup \Omega^c} (\tilde{\mathcal{K}}\rho)(\mathbf{x}) \Delta \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega \cup \Omega^c} \int_{\Gamma} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \Delta_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Gamma} \rho(\mathbf{y}) \underbrace{\int_{\Omega \cup \Omega^c} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}_{=-(\gamma_1^{int} \varphi)(\mathbf{y})} \, d\sigma_{\mathbf{y}} \\ &= - \int_{\Gamma} \rho(\mathbf{y}) (\gamma_1^{int} \varphi)(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}}, \end{aligned}$$

wobei wir

$$\int_{\Omega \cup \Omega^c} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} \Delta_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = -\varphi(\mathbf{y})$$

benutzt haben. Zusammen ergibt sich die Behauptung  $[\gamma_1 \tilde{\mathcal{K}}\rho] = 0$  auf  $\Gamma$ .  $\square$

## 5.5 Hypersingulärer Operator

Die Konormalenableitung des Doppelschichtpotentials definiert einen stetigen Operator

$$\gamma_1^{int} \tilde{\mathcal{K}} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma).$$

Der Operator

$$(\mathcal{W}\rho)(\mathbf{x}) := -(\gamma_1^{int}\tilde{\mathcal{K}}\rho)(\mathbf{x}) = -\lim_{\Omega \ni \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma} \langle \mathbf{n}_{\mathbf{x}}, \nabla(\tilde{\mathcal{K}}\rho)(\mathbf{z}) \rangle, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (5.6)$$

ist folglich stetig:

$$\|\mathcal{W}\rho\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq c\|\rho\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } \rho \in H^{1/2}(\Gamma).$$

**Definition 5.17** Der durch (5.6) definierte Operator

$$\mathcal{W} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$$

heißt **hypersingulärer Operator**.

Für  $\mathbf{z} \in \Omega$  und  $\mathbf{x} \in \Gamma$  mit  $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| \leq \varepsilon$  lautet das Doppelschichtpotential im Fall  $d = 3$

$$(\tilde{\mathcal{K}}\rho)(\mathbf{z}) = \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \varepsilon} \frac{\langle \mathbf{n}_{\mathbf{y}}, \mathbf{z} - \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|^3} \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}}.$$

Für festes  $\varepsilon > 0$  dürfen wir die Grenzwertbildung  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x}$  und das Bilden der Konormalableitung vertauschen, so dass folgt

$$(\mathcal{W}_\varepsilon\rho)(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \varepsilon} \left\{ \frac{\langle \mathbf{n}_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}_{\mathbf{y}} \rangle}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} - 3 \frac{\langle \mathbf{n}_{\mathbf{y}}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{n}_{\mathbf{x}}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^5} \right\} \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Derselben Argumentation im Fall  $d = 2$  folgend erhalten wir

$$(\mathcal{W}_\varepsilon\rho)(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \varepsilon} \left\{ \frac{\langle \mathbf{n}_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}_{\mathbf{y}} \rangle}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} - 2 \frac{\langle \mathbf{n}_{\mathbf{y}}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{n}_{\mathbf{x}}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^4} \right\} \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Beim Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  existieren jedoch beide Integrale nicht als Cauchy-Hauptwertintegral. Daher kann der hypersinguläre Operator  $\mathcal{W}$  nur mit einer geeigneten Regularisierung explizit dargestellt werden.

Aus der ersten Greenschen Formel folgt

$$\int_{\Omega} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int}G)(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} = \int_{\Omega} \{ \langle \nabla_{\mathbf{y}}G(\mathbf{z}, \mathbf{y}), \nabla 1 \rangle + \Delta_{\mathbf{y}}G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \} \, d\mathbf{y} = -1, \quad \mathbf{z} \in \Omega.$$

Deshalb ist

$$\nabla_{\mathbf{z}}(\tilde{\mathcal{K}}1)(\mathbf{z}) = 0, \quad \mathbf{z} \in \Omega$$

und weiter mittels Grenzübergang  $\Omega \ni \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma$

$$(\mathcal{W}1)(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Folglich erhalten wir

$$(\mathcal{W}\rho)(\mathbf{x}) = -\lim_{\Omega \ni \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma} \left\langle \mathbf{n}_{\mathbf{x}}, \nabla_{\mathbf{z}} \int_{\Gamma} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int}G)(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \{ \rho(\mathbf{y}) - \rho(\mathbf{x}) \} \, d\sigma_{\mathbf{y}} \right\rangle, \quad \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Für eine Lipschitz-stetige Dichtefunktion  $\rho$  besitzt demnach der hypersinguläre Operator die Darstellung

$$(\mathcal{W}\rho)(\mathbf{x}) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \varepsilon} (\gamma_{1,\mathbf{x}}^{int}\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int}G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \{ \rho(\mathbf{y}) - \rho(\mathbf{x}) \} \, d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma$$

als Cauchy-Hauptwertintegral.

Um im Fall  $d = 3$  eine für die numerische Umsetzung brauchbare Darstellung des hypersingulären Operators nachzuweisen, benötigen wir die Oberflächenrotation.

**Definition 5.18** Für gegebenes  $\rho \in C^1(\Gamma)$  sei  $\tilde{\rho}$  eine geeignete Fortsetzung auf eine  $\delta$ -Umgebung  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(\mathbf{x}, \Gamma) < \delta\}$  des Gebietsrandes  $\Gamma$ . Dann ist der **Oberflächengradient** gegeben durch

$$\nabla_{\Gamma} \rho(\mathbf{x}) := \nabla \tilde{\rho}(\mathbf{x}) - \langle \nabla \tilde{\rho}(\mathbf{x}), \mathbf{n}_{\mathbf{x}} \rangle \mathbf{n}_{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma$$

und die **Oberflächenrotation** durch

$$\text{rot}_{\Gamma} \rho(\mathbf{x}) := \mathbf{n}_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\Gamma} \rho(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma.$$

**Bemerkung** Ist die Funktion  $\rho(\mathbf{x})$  im Raum definiert, dann gilt

$$\text{rot}_{\Gamma} \rho(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\Gamma} \rho(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_{\mathbf{x}} \times \{ \nabla \tilde{\rho}(\mathbf{x}) - \langle \nabla \tilde{\rho}(\mathbf{x}), \mathbf{n}_{\mathbf{x}} \rangle \mathbf{n}_{\mathbf{x}} \} = \mathbf{n}_{\mathbf{x}} \times \nabla \rho(\mathbf{x}).$$

△

**Satz 5.19** Sei  $\Gamma$  eine stückweise glatte, geschlossene Oberfläche und seien  $\rho, \mu \in C(\Gamma)$  stückweise differenzierbar. Dann gilt

$$(\mathcal{W}\rho, \mu)_{\Gamma} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{\langle \text{rot}_{\Gamma} \mu(\mathbf{x}), \text{rot}_{\Gamma} \rho(\mathbf{y}) \rangle}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\sigma_{\mathbf{y}} d\sigma_{\mathbf{x}}.$$

*Beweis.* Das Doppelschichtpotential  $u = \tilde{\mathcal{K}}\rho$  im Punkt  $\mathbf{z} \in \Omega$  lautet

$$u(\mathbf{z}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \rho(\mathbf{y}) \left\langle \mathbf{n}_{\mathbf{y}}, \nabla_{\mathbf{y}} \frac{1}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|} \right\rangle d\sigma_{\mathbf{y}}.$$

Wegen

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|} = \frac{z_i - y_i}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|^3} = -\frac{\partial}{\partial z_i} \frac{1}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|}, \quad (5.7)$$

folgt

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \left\langle \mathbf{n}_{\mathbf{y}}, \nabla_{\mathbf{y}} \frac{1}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|} \right\rangle = - \left\langle \mathbf{n}_{\mathbf{y}}, \nabla_{\mathbf{y}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|} \right\} \right\rangle. \quad (5.8)$$

Bezeichnet  $\mathbf{e}_i$  den  $i$ -ten Basisvektor im  $\mathbb{R}^3$ , dann folgt mit dem Graßmannschen Entwick-

lungssatz<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_{\mathbf{y}} \left\{ \mathbf{e}_i \times \nabla_{\mathbf{y}} \frac{1}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|} \right\} &= \nabla_{\mathbf{y}} \times \left\{ \mathbf{e}_i \times \nabla_{\mathbf{y}} \frac{1}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|} \right\} \\ &= \left\langle \nabla_{\mathbf{y}}, \nabla_{\mathbf{y}} \frac{1}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|} \right\rangle \mathbf{e}_i - \langle \nabla_{\mathbf{y}}, \mathbf{e}_i \rangle \nabla_{\mathbf{y}} \frac{1}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|} \\ &= \underbrace{\Delta_{\mathbf{y}} \frac{1}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|}}_{=0, \text{ da } \mathbf{z} \neq \mathbf{y}} \mathbf{e}_i - \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ \nabla_{\mathbf{y}} \frac{1}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|} \right\}. \end{aligned}$$

Zusammen mit (5.8) können wir deshalb die partiellen Ableitungen des Doppelschichtpotentials ausdrücken gemäß

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z_i}(\mathbf{z}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \rho(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial z_i} \left\langle \mathbf{n}_{\mathbf{y}}, \nabla_{\mathbf{y}} \frac{1}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|} \right\rangle d\sigma_{\mathbf{y}} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \rho(\mathbf{y}) \left\langle \mathbf{n}_{\mathbf{y}}, \nabla_{\mathbf{y}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|} \right\} \right\rangle d\sigma_{\mathbf{y}} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \rho(\mathbf{y}) \left\langle \mathbf{n}_{\mathbf{y}}, \operatorname{rot}_{\mathbf{y}} \left\{ \mathbf{e}_i \times \nabla_{\mathbf{y}} \frac{1}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|} \right\} \right\rangle d\sigma_{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Anwenden des Stokesschen Integralsatzes<sup>2)</sup> liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z_i}(\mathbf{z}) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left\langle \operatorname{rot}_{\Gamma, \mathbf{y}} \rho(\mathbf{y}), \mathbf{e}_i \times \nabla_{\mathbf{y}} \frac{1}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|} \right\rangle d\sigma_{\mathbf{y}} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left\langle \mathbf{e}_i, \operatorname{rot}_{\Gamma, \mathbf{y}} \rho(\mathbf{y}) \times \nabla_{\mathbf{y}} \frac{1}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|} \right\rangle d\sigma_{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

In Hinblick auf (5.7) schließen folglich wir

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{z}} u(\mathbf{z}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \operatorname{rot}_{\Gamma, \mathbf{y}} \rho(\mathbf{y}) \times \nabla_{\mathbf{y}} \frac{1}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|} \right\} d\sigma_{\mathbf{y}} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \operatorname{rot}_{\Gamma, \mathbf{y}} \rho(\mathbf{y}) \times \nabla_{\mathbf{z}} \frac{1}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|} \right\} d\sigma_{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

und weiter für ein beliebiges  $\mathbf{x} \in \Gamma$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}_{\mathbf{x}}, \nabla_{\mathbf{z}} u(\mathbf{z}) \rangle &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left\langle \mathbf{n}_{\mathbf{x}}, \operatorname{rot}_{\Gamma, \mathbf{y}} \rho(\mathbf{y}) \times \nabla_{\mathbf{z}} \frac{1}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|} \right\rangle d\sigma_{\mathbf{y}} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left\langle \operatorname{rot}_{\Gamma, \mathbf{y}} \rho(\mathbf{y}), \mathbf{n}_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{z}} \frac{1}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|} \right\rangle d\sigma_{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup>Der Graßmannsche Entwicklungssatz besagt, dass  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{c}$  gilt.

<sup>2)</sup>Auf einer geschlossenen, stückweise glatten Oberfläche folgt aus dem Stokesschen Satz

$$0 = \int_{\Gamma} \langle \operatorname{rot}(\mathbf{u}\mathbf{v}), \mathbf{n} \rangle d\sigma = \int_{\Gamma} \left\{ v \langle \operatorname{rot} \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle + \underbrace{\langle \nabla v \times \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle}_{=\langle \mathbf{n} \times \nabla v, \mathbf{u} \rangle} \right\} d\sigma = \int_{\Gamma} \left\{ v \langle \operatorname{rot} \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle + \langle \operatorname{rot}_{\Gamma} v, \mathbf{u} \rangle \right\} d\sigma.$$

Nun fixieren wir ein  $\varepsilon > 0$  und bilden den Grenzübergang  $\Omega \ni \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma$ :

$$\begin{aligned} -(\mathcal{W}_\varepsilon \rho)(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq \varepsilon} \left\langle \operatorname{rot}_{\Gamma, \mathbf{y}} \rho(\mathbf{y}), \mathbf{n}_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \right\rangle d\sigma_{\mathbf{y}} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq \varepsilon} \left\langle \operatorname{rot}_{\Gamma, \mathbf{y}} \rho(\mathbf{y}), \operatorname{rot}_{\Gamma, \mathbf{x}} \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \right\rangle d\sigma_{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Für die Bilinearform ergibt sich deshalb

$$\begin{aligned} (\mathcal{W}_\varepsilon \rho, \mu)_\Gamma &= -\frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \mu(\mathbf{x}) \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq \varepsilon} \left\langle \operatorname{rot}_{\Gamma, \mathbf{y}} \rho(\mathbf{y}), \operatorname{rot}_{\Gamma, \mathbf{x}} \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \right\rangle d\sigma_{\mathbf{y}} d\sigma_{\mathbf{x}} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq \varepsilon} \left\langle \mu(\mathbf{x}) \operatorname{rot}_{\Gamma, \mathbf{y}} \rho(\mathbf{y}), \operatorname{rot}_{\Gamma, \mathbf{x}} \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \right\rangle d\sigma_{\mathbf{y}} d\sigma_{\mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \int_{\mathbf{y} \in \Gamma: \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq \varepsilon} \left\langle \operatorname{rot}_{\mathbf{x}} \{ \tilde{\mu}(\mathbf{x}) \operatorname{rot}_{\Gamma, \mathbf{y}} \rho(\mathbf{y}) \}, \mathbf{n}_{\mathbf{x}} \right\rangle \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} d\sigma_{\mathbf{y}} d\sigma_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Benutzen wir die Identität

$$\begin{aligned} \left\langle \operatorname{rot}_{\mathbf{x}} \{ \tilde{\mu}(\mathbf{x}) \operatorname{rot}_{\Gamma, \mathbf{y}} \rho(\mathbf{y}) \}, \mathbf{n}_{\mathbf{x}} \right\rangle &= \left\langle \nabla_{\mathbf{x}} \tilde{\mu}(\mathbf{x}) \times \operatorname{rot}_{\Gamma, \mathbf{y}} \rho(\mathbf{y}), \mathbf{n}_{\mathbf{x}} \right\rangle \\ &= \left\langle \mathbf{n}_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \tilde{\mu}(\mathbf{x}), \operatorname{rot}_{\Gamma, \mathbf{y}} \rho(\mathbf{y}) \right\rangle \\ &= \left\langle \operatorname{rot}_{\Gamma, \mathbf{x}} \mu(\mathbf{x}), \operatorname{rot}_{\Gamma, \mathbf{y}} \rho(\mathbf{y}) \right\rangle \end{aligned}$$

und bilden den Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$ , so erhalten wir schließlich die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung** Im zweidimensionalen Fall kann man eine analoge Darstellung herleiten. Hat man eine Parametrisierung  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Gamma$  des Randes und stellt  $\rho$  und  $\mu$  bezüglich des Parameterintervalls  $[0, 1]$  dar, so folgt die Beziehung

$$(\mathcal{W}\rho, \mu)_\Gamma = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \log \|\gamma(s) - \gamma(t)\| \rho'(t) \mu'(s) dt ds. \quad (5.9)$$

$\triangle$

## 6. Abbildungseigenschaften der Integraloperatoren

### 6.1 Calderón-Projektor

Aus der Darstellungsformel

$$u(\mathbf{z}) = \int_{\Gamma} (\gamma_{0,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{z}, \mathbf{y}) (\gamma_1^{int} u)(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} - \int_{\Gamma} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{z}, \mathbf{y}) (\gamma_0^{int} u)(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega} G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{z} \in \Omega$$

ergibt sich durch den Grenzübergang  $\Omega \ni \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma$  die Randintegralgleichung

$$(\gamma_0^{int} u)(\mathbf{x}) = (\mathcal{V}\gamma_1^{int} u)(\mathbf{x}) + \{1 - \sigma(\mathbf{x})\} (\gamma_0^{int} u)(\mathbf{x}) - (\mathcal{K}\gamma_0^{int} u)(\mathbf{x}) + (\mathcal{N}_0 f)(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (6.1)$$

Die Anwendung der Konormalenableitung auf  $u$  liefert eine zweite Randintegralgleichung

$$(\gamma_1^{int} u)(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) (\gamma_1^{int} u)(\mathbf{x}) + (\mathcal{K}^* \gamma_1^{int} u)(\mathbf{x}) + (\mathcal{W}\gamma_0^{int} u)(\mathbf{x}) + (\mathcal{N}_1 f)(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (6.2)$$

Beide Gleichungen lassen sich als Gleichungssystem zusammenfassen:

$$\begin{bmatrix} \gamma_0^{int} u \\ \gamma_1^{int} u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \sigma)I - \mathcal{K} & \mathcal{V} \\ \mathcal{W} & \sigma I + \mathcal{K}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0^{int} u \\ \gamma_1^{int} u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{N}_0 f \\ \mathcal{N}_1 f \end{bmatrix} \quad \text{auf } \Gamma. \quad (6.3)$$

**Definition 6.1** Der Operator

$$\mathcal{C} := \begin{bmatrix} (1 - \sigma)I - \mathcal{K} & \mathcal{V} \\ \mathcal{W} & \sigma I + \mathcal{K}^* \end{bmatrix} : H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$$

heißt **Calderón-Projektor**.

**Bemerkung** Wie wir im vorigen Kapitel gesehen haben, sind die Operatoren

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &: H^{-1/2+s}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2+s}(\Gamma), \\ (1 - \sigma)I - \mathcal{K} &: H^{1/2+s}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2+s}(\Gamma), \\ \sigma I + \mathcal{K}^* &: H^{-1/2+s}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2+s}(\Gamma), \\ \mathcal{W} &: H^{1/2+s}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2+s}(\Gamma) \end{aligned}$$

stetig für  $s = 0$ . Auf Lipschitz-Gebieten kann deren Stetigkeit sogar für alle  $|s| \leq 1/2$  nachgewiesen werden. Folglich ist der Calderón-Projektor  $\mathcal{C} : H^{1/2+s}(\Gamma) \times H^{-1/2+s}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2+s}(\Gamma) \times H^{-1/2+s}(\Gamma)$  ebenfalls für alle  $|s| \leq 1/2$  stetig.  $\triangle$

**Satz 6.2** Der Calderón-Projektor ist ein Projektor, das heißt, es gilt  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^2$ .

*Beweis.* Seien  $(\rho, \mu) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$  beliebig gegeben. Dann definiert

$$u(\mathbf{z}) = (\tilde{\mathcal{V}}\mu)(\mathbf{z}) - (\tilde{\mathcal{K}}\rho)(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \Omega \quad (6.4)$$

eine Lösung der Laplace-Gleichung. Demnach erfüllen die Cauchy-Daten  $(\gamma_0^{int}u, \gamma_1^{int}u)$  die Randintegralgleichungen (6.1) und (6.2) für  $f = 0$ , das heißt, nach (6.3) gilt

$$\begin{bmatrix} \gamma_0^{int}u \\ \gamma_1^{int}u \end{bmatrix} = \mathcal{C} \begin{bmatrix} \gamma_0^{int}u \\ \gamma_1^{int}u \end{bmatrix} \quad \text{auf } \Gamma.$$

Durch Spurbildung in (6.4) erhalten wir unter Beachtung der Sprungbedingungen außerdem die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} (\gamma_0^{int}u)(\mathbf{x}) &= (\mathcal{V}\mu)(\mathbf{x}) + \{1 - \sigma(\mathbf{x})\}\rho(\mathbf{x}) - (\mathcal{K}\rho)(\mathbf{x}) \\ (\gamma_1^{int}u)(\mathbf{x}) &= \sigma(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x}) + (\mathcal{K}^*\mu)(\mathbf{x}) + (\mathcal{W}\rho)(\mathbf{x}) \end{aligned} \right\} \quad \text{auf } \Gamma.$$

Mit andern Worten, es ist

$$\begin{bmatrix} \gamma_0^{int}u \\ \gamma_1^{int}u \end{bmatrix} = \mathcal{C} \begin{bmatrix} \rho \\ \mu \end{bmatrix} \quad \text{auf } \Gamma.$$

Folglich gilt die Beziehung

$$\mathcal{C} \begin{bmatrix} \rho \\ \mu \end{bmatrix} = \mathcal{C}^2 \begin{bmatrix} \rho \\ \mu \end{bmatrix} \quad \text{auf } \Gamma$$

für alle  $(\rho, \mu) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ , was zu zeigen war.  $\square$

**Korollar 6.3** Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{V}\mathcal{W} &= (\sigma I + \mathcal{K})((1 - \sigma)I - \mathcal{K}), \\ \mathcal{W}\mathcal{V} &= (\sigma I + \mathcal{K}^*)((1 - \sigma)I - \mathcal{K}^*), \\ \mathcal{V}\mathcal{K}^* &= \mathcal{K}\mathcal{V}, \\ \mathcal{K}^*\mathcal{W} &= \mathcal{W}\mathcal{K}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Die angegebenen Gleichungen folgen unmittelbar, wenn man die Beziehung  $\mathcal{C}^2 = \mathcal{C}$  ausschreibt.  $\square$

## 6.2 Elliptizität des Einfachschichtoperators

Die Funktion  $u = \tilde{\mathcal{V}}\rho \in H^1(\Omega)$  löst das Dirichlet-Problem

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad \gamma_0^{int}u = \gamma_0^{int}\tilde{\mathcal{V}}\rho = \mathcal{V}\rho \text{ auf } \Gamma.$$

Für  $v \in H^1(\Omega)$  gilt die erste Greensche Formel

$$a_\Omega(u, v) := \int_\Omega \langle \nabla u(\mathbf{x}), \nabla v(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x} = (\gamma_1^{int} u, \gamma_0^{int} v)_\Gamma,$$

sowie nach Satz 3.5

$$\|\gamma_1^{int} u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \leq ca_\Omega(u, u).$$

Um eine entsprechende Formel für die äußere Konormalenableitung  $\gamma_1^{ext} u \in H^{-1/2}(\Gamma)$  herzuleiten, spielt das Fernfeldverhalten von  $(\tilde{\mathcal{V}}\rho)(\mathbf{x})$  für  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$  eine wesentliche Rolle. Hierzu sei  $V = H^{-1/2}(\Gamma)$  im Fall  $d = 3$  und

$$V := \{\mu \in H^{-1/2}(\Gamma) : (\mu, 1)_\Gamma = 0\}$$

im Fall  $d = 2$ .

**Lemma 6.4** Seien  $\mathbf{z} \in \Omega$  und  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ , so dass

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| > \max\{1, 2 \operatorname{diam}(\Omega)\},$$

und sei  $\rho \in V$ . Dann gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{x})| &= |(\tilde{\mathcal{V}}\rho)(\mathbf{x})| \leq \frac{c}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|} \\ \|\nabla u(\mathbf{x})\| &= \|\nabla(\tilde{\mathcal{V}}\rho)(\mathbf{x})\| \leq \frac{c}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Mit der Dreiecksungleichung folgt für alle  $\mathbf{y} \in \Omega$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \operatorname{diam}(\Omega) \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|$$

und somit

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|.$$

Im Fall  $d = 3$  erhalten wir die erste Behauptung aus

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{x})| &= |((\gamma_0^{int} G)(\mathbf{x}, \cdot), \rho)_\Gamma| \\ &\leq \|(\gamma_0^{int} G)(\mathbf{x}, \cdot)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \|\rho\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\ &\leq c_\Gamma \|G(\mathbf{x}, \cdot)\|_{H^1(\Omega)} \|\rho\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}, \end{aligned}$$

wobei hierin wegen  $\nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y} - \mathbf{x}) / (4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3)$  gilt

$$\begin{aligned} \|G(\mathbf{x}, \cdot)\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \frac{1}{16\pi^2} \int_\Omega \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} d\mathbf{y} + \frac{1}{16\pi^2} \int_\Omega \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^4} d\mathbf{y} \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_\Omega \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2} d\mathbf{y} + \frac{1}{\pi^2} \int_\Omega \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^4} d\mathbf{y} \\ &\leq \frac{5|\Omega|}{4\pi^2\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2}. \end{aligned}$$



Die zweite Behauptung ergibt sich entsprechend aus

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{y_i - x_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}}.$$

Im Fall  $d = 2$  gilt mit der Taylor-Entwicklung

$$\log \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \log \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \frac{\langle \mathbf{y} - \mathbf{z}, \bar{\mathbf{y}} - \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{y}}\|^2}$$

für ein geeignetes  $\bar{\mathbf{y}} = \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda) \mathbf{z}$  mit  $\lambda \in (0, 1)$ . Wegen  $(\rho, 1)_{\Gamma} = 0$  folgt

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \underbrace{\log \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|}_{=const} + \frac{\langle \mathbf{y} - \mathbf{z}, \bar{\mathbf{y}} - \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{y}}\|^2} \right\} \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\langle \mathbf{y} - \mathbf{z}, \bar{\mathbf{y}} - \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{y}}\|^2} \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}}, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung wie im Fall  $d = 3$  geschlossen werden kann.  $\square$

Sei  $\mathbf{z} \in \Omega$  und  $R > 2 \operatorname{diam}(\Omega)$ . Dann erfüllt die Funktion  $u = \tilde{\mathcal{V}}\rho$  die Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } B_R(\mathbf{z}) \setminus \bar{\Omega} \\ \gamma_0^{ext} u &= \gamma_0^{ext} \tilde{\mathcal{V}}\rho = \mathcal{V}\rho && \text{auf } \Gamma \\ \gamma_0^{int} u &= \gamma_0^{int} \tilde{\mathcal{V}}\rho = \mathcal{V}\rho && \text{auf } \partial B_R(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

Die erste Greensche Formel bezüglich  $B_R(\mathbf{z}) \setminus \bar{\Omega}$  für ein  $v \in H^1(B_R(\mathbf{z}) \setminus \bar{\Omega})$  lautet

$$a_{B_R(\mathbf{z}) \setminus \bar{\Omega}}(u, v) = -(\gamma_1^{ext} u, \gamma_0^{ext} v)_{\Gamma} + (\gamma_1^{int} u, \gamma_0^{int} v)_{\partial B_R(\mathbf{z})}.$$

Für  $v = u$  gilt dann nach Lemma 6.4

$$|(\gamma_1^{int} u, \gamma_0^{int} u)_{\partial B_R(\mathbf{z})}| \leq c \int_{\partial B_R(\mathbf{z})} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^3} \, d\sigma_{\mathbf{x}} \leq cR^{d-4}.$$

Für  $R \rightarrow \infty$  und  $u = \tilde{\mathcal{V}}\rho$  folgt somit die erste Greensche Formel im Außenraum

$$a_{\Omega^c}(u, u) = \int_{\Omega^c} \langle \nabla u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}) \rangle = -(\gamma_1^{ext} u, \gamma_0^{ext} u)_{\Gamma}.$$

Man beachte, dass im Fall  $d = 2$  die Voraussetzung  $(\rho, 1)_{\Gamma} = 0$  wesentlich ist. Genauso wie in Satz 3.5 folgt nun

$$\|\gamma_1^{ext} u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \leq ca_{\Omega^c}(u, u).$$

**Satz 6.5** Für alle  $\rho \in V$  gilt

$$(\mathcal{V}\rho, \rho)_{\Gamma} \geq c_E^{\mathcal{V}} \|\rho\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2.$$

*Beweis.* Für  $u = \tilde{\mathcal{V}}\rho$  folgt aus den Greenschen Formeln

$$\begin{aligned} (\gamma_1^{int} u, \gamma_0^{int} u)_\Gamma &= a_\Omega(u, u) \geq c_{int} \|\gamma_1^{int} u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2, \\ -(\gamma_1^{ext} u, \gamma_0^{ext} u)_\Gamma &= a_{\Omega^c}(u, u) \geq c_{ext} \|\gamma_1^{ext} u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

Addition liefert

$$-\underbrace{([\gamma_1 u], \gamma_0^{int} u)}_{=-\rho} \underbrace{)}_{=\mathcal{V}\rho} \Gamma = a_\Omega(u, u) + a_{\Omega^c}(u, u) \geq c_{int} \|\gamma_1^{int} u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 + c_{ext} \|\gamma_1^{ext} u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2.$$

In Anbetracht von

$$\|\rho\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 = \|\gamma_1^{int} u - \gamma_1^{ext} u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \leq 2\{\|\gamma_1^{int} u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \|\gamma_1^{ext} u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2\}$$

folgt die Behauptung

$$(\mathcal{V}\rho, \rho)_\Gamma \geq \frac{1}{2} \min\{c_{int}, c_{ext}\} \|\rho\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2.$$

□

**Bemerkung** Um die positive Definitheit des Einfachschichtoperators im Fall  $d = 2$  zu garantieren, musste der  $H^{-1/2}(\Gamma)$  bezüglich den konstanten Funktionen faktorisiert werden. Der Grund ist, dass der kleinste Eigenwert des Einfachschichtoperators je nach Skalierung des Gebiets positiv oder negativ sein kann. Unter der Voraussetzung  $\text{diam}(\Omega) < 1$  ist der Einfachschichtoperator aber auf ganz  $H^{-1/2}(\Gamma)$  elliptisch.  $\triangle$

Als direkte Konsequenz der Elliptizität des Einfachschichtoperators können wir die Semielliptizität des hypersingulären Operators folgern.

**Proposition 6.6** Für alle  $\rho \in H^{1/2}(\Gamma)$  gilt

$$(\mathcal{W}\rho, \rho)_\Gamma \geq c_E^{\mathcal{W}} |\rho|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2.$$

*Beweis.* Wir beweisen die Aussage nur im Fall einer stückweise glatten, geschlossene Oberfläche  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ . Dazu betrachten wir zunächst den Fall  $d = 3$ . Gemäß der Definition des Oberflächengradienten ist  $\nabla_\Gamma \rho(\mathbf{x})$  orthogonal zur Normalen  $\mathbf{n}_\mathbf{x}$ . Folglich gilt

$$\|\text{rot}_\Gamma \rho(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{n}_\mathbf{x} \times \nabla_\Gamma \rho(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{n}_\mathbf{x}\| \|\nabla_\Gamma \rho(\mathbf{x})\| = \|\nabla_\Gamma \rho(\mathbf{x})\| \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Aus den Sätzen 5.19 und 6.5 folgt deshalb, dass für eine stückweise glatte Funktion  $\rho \in C(\Gamma)$  gilt

$$(\mathcal{W}\rho, \rho)_\Gamma = (\mathcal{V} \text{rot}_\Gamma \rho, \text{rot}_\Gamma \rho)_\Gamma \geq c_E^{\mathcal{V}} \|\text{rot}_\Gamma \rho\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 = c_E^{\mathcal{V}} \|\nabla_\Gamma \rho\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \geq c_E^{\mathcal{W}} |\rho|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2.$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung durch Vervollständigung bezüglich des  $H^{1/2}(\Gamma)$ .

Im Fall  $d = 2$  folgt die Behauptung analog aus (5.9) und Satz 6.5, wenn man beachtet, dass für 1-periodische Funktionen  $\int_0^1 \rho'(s) ds = 0$  gilt.  $\square$

Aus dieser Proposition schließen wir, dass der hypersinguläre Operator  $H^{1/2}(\Gamma)$ -elliptisch ist, wenn wir die Konstanten fixieren. Dies kann durch die Einschränkung auf den Raum

$$V := \{\mu \in H^{1/2}(\Gamma) : (\mu, 1)_\Gamma = 0\}$$

geschehen, aber auch durch die Einschränkung auf den Raum

$$V := \{\mu \in H^{1/2}(\Gamma) : (\mu, \mathcal{V}^{-1}1)_\Gamma = 0\}.$$

## 6.3 Dirichlet-zu-Neumann-Abbildung

Wir wollen eine Beziehung zwischen den Cauchy-Daten  $(\gamma_0^{int}u, \gamma_1^{int}u)$  der Laplace-Gleichung  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$  herleiten. Mit  $f = 0$  folgt aus (6.1)

$$\gamma_1^{int}u = \mathcal{V}^{-1}(\sigma I + \mathcal{K})\gamma_0^{int}u \quad \text{auf } \Gamma. \quad (6.5)$$

**Definition 6.7** Der Operator

$$\mathcal{S} := \mathcal{V}^{-1}(\sigma I + \mathcal{K}) : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$$

heißt **Dirichlet-zu-Neumann-Abbildung** oder **Steklov-Poincaré-Operator**.

Einsetzen von (6.5) in (6.2) liefert die äquivalente, symmetrische Darstellung

$$\mathcal{S} = \mathcal{W} + (\sigma I + \mathcal{K}^*)\mathcal{V}^{-1}(\sigma I + \mathcal{K}) : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma).$$

Hieraus folgt

$$\|\mathcal{S}\rho\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \geq c_E^{\mathcal{W}} \|\rho\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } \rho \in V := \{\mu \in H^{1/2}(\Gamma) : (\mu, 1)_\Gamma = 0\}.$$

## 6.4 Kontraktionseigenschaft des Doppelschichtoperators

Wir wollen nun im Fall  $d = 2$  annehmen, dass  $\text{diam}(\Omega) < 1$  ist. Der Einfachschichtoperator  $\mathcal{V} : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$  ist dann beschränkt und elliptisch. Durch

$$\|\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}} := \sqrt{(\mathcal{V}^{-1}\rho, \rho)_\Gamma} \quad \text{für alle } \rho \in H^{1/2}(\Gamma)$$

wird folglich eine zur  $\|\cdot\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$ -Norm äquivalente Norm definiert.

**Satz 6.8** Es gilt für alle  $\rho \in V := \{\mu \in H^{1/2}(\Gamma) : (\mu, \mathcal{V}^{-1}1)_\Gamma = 0\}$  die Abschätzung

$$(1 - c_K)\|\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}} \leq \|(\sigma I + \mathcal{K})\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}} \leq c_K\|\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}} \quad (6.6)$$

mit

$$0 < c_K := \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c_E^{\mathcal{V}}c_E^{\mathcal{W}}} < 1.$$

*Beweis.* Mit der symmetrischen Darstellung der Dirichlet-zu-Neumann-Abbildung  $\mathcal{S}$  ist

$$\|(\sigma I + \mathcal{K})\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}}^2 = (\mathcal{V}^{-1}(\sigma I + \mathcal{K})\rho, (\sigma I + \mathcal{K})\rho)_\Gamma = (\mathcal{S}\rho, \rho)_\Gamma - (\mathcal{W}\rho, \rho)_\Gamma.$$

Bezeichnet  $\mathcal{J} : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$  die durch

$$(\mathcal{J}\rho, \mu)_{H^{1/2}(\Gamma)} = (\rho, \mu)_\Gamma \quad \text{für alle } \mu \in H^{1/2}(\Gamma)$$

definierte Riesz-Abbildung, dann ist

$$\mathcal{A} = \mathcal{J}\mathcal{V}^{-1} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$$

offensichtlich stetig, selbstadjungiert und  $H^{1/2}(\Gamma)$ -elliptisch. Die Identität  $\mathcal{S} = \mathcal{V}^{-1}(\sigma I + \mathcal{K})$  liefert demnach

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}\rho, \rho)_\Gamma &= (\mathcal{V}^{-1}(\sigma I + \mathcal{K})\rho, \rho)_\Gamma \\ &= (\mathcal{J}\mathcal{V}^{-1}(\sigma I + \mathcal{K})\rho, \rho)_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &= (\mathcal{A}^{1/2}(\sigma I + \mathcal{K})\rho, \mathcal{A}^{1/2}\rho)_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq \|\mathcal{A}^{1/2}(\sigma I + \mathcal{K})\rho\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \|\mathcal{A}^{1/2}\rho\|_{H^{1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Weil für ein beliebiges  $\mu \in H^{1/2}(\Gamma)$  gilt

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}^{1/2}\mu\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 &= (\mathcal{A}^{1/2}\mu, \mathcal{A}^{1/2}\mu)_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &= (\mathcal{J}\mathcal{V}^{-1}\mu, \mu)_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &= (\mathcal{V}^{-1}\mu, \mu)_\Gamma \\ &= \|\mu\|_{\mathcal{V}^{-1}}^2, \end{aligned}$$

schließen wir

$$(\mathcal{S}\rho, \rho)_\Gamma \leq \|(\sigma I + \mathcal{K})\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}} \|\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}}.$$

Andererseits ergibt sich für  $\rho \in V$

$$(\mathcal{W}\rho, \rho)_\Gamma \geq c_E^{\mathcal{W}} \|\rho\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \geq c_E^{\mathcal{V}} c_E^{\mathcal{W}} (\mathcal{V}^{-1}\rho, \rho)_\Gamma = c_E^{\mathcal{V}} c_E^{\mathcal{W}} \|\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}}^2.$$

Insgesamt gilt deshalb

$$\begin{aligned} \|(\sigma I + \mathcal{K})\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}}^2 &= (\mathcal{S}\rho, \rho)_\Gamma - (\mathcal{W}\rho, \rho)_\Gamma \\ &\leq \|(\sigma I + \mathcal{K})\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}} \|\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}} - c_E^{\mathcal{V}} c_E^{\mathcal{W}} \|\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}}^2. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$a := \|(\sigma I + \mathcal{K})\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}} \geq 0, \quad b := \|\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}} \geq 0, \quad c := c_E^{\mathcal{V}} c_E^{\mathcal{W}} > 0,$$

dann ist dies gleichbedeutend mit

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} + c \leq 0$$

Letzteres ist jedoch äquivalent zur Behauptung:

$$\underbrace{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - c}}_{=1-c_K>0} \leq \frac{a}{b} = \frac{\|(\sigma I + \mathcal{K})\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}}}{\|\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}}} \leq \frac{1}{2} + \underbrace{\sqrt{\frac{1}{4} - c}}_{=c_K>0}.$$

□

**Korollar 6.9** Die obere Schranke in (6.6) gilt sogar auf ganz  $H^{1/2}(\Gamma)$ , das heißt, es ist

$$\|(\sigma I + \mathcal{K})\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}} \leq c_K \|\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}}$$

für alle  $\rho \in H^{1/2}(\Gamma)$  mit  $0 < c_K < 1$  aus Satz 6.8.

*Beweis.* Setzen wir die konstante Funktion  $u(\mathbf{x}) \equiv 1$  in die Randintegralgleichung (6.1) ein, dann folgt  $(\sigma I + \mathcal{K})1 = 0$ . Spalten wir  $\rho \in H^{1/2}(\Gamma)$  auf gemäß

$$\rho = \rho^{(1)} + \rho^{(2)} \text{ mit } (\rho^{(1)}, \mathcal{V}^{-1}1)_\Gamma = 0 \text{ und } \rho^{(2)} := \frac{(\rho, \mathcal{V}^{-1}1)_\Gamma}{(1, \mathcal{V}^{-1}1)_\Gamma} 1 \in \text{kern}(\sigma I + \mathcal{K}),$$

so ergibt sich daher

$$\|(\sigma I + \mathcal{K})\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}} = \|(\sigma I + \mathcal{K})\rho^{(1)}\|_{\mathcal{V}^{-1}} \leq c_K \|\rho^{(1)}\|_{\mathcal{V}^{-1}}.$$

Mit

$$\|\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}}^2 = \|\rho^{(1)}\|_{\mathcal{V}^{-1}}^2 + \underbrace{2(\mathcal{V}^{-1}\rho^{(1)}, \rho^{(2)})_\Gamma}_{=0} + \|\rho^{(2)}\|_{\mathcal{V}^{-1}}^2 \geq \|\rho^{(1)}\|_{\mathcal{V}^{-1}}^2$$

erhalten wir schließlich die Behauptung.  $\square$

**Proposition 6.10** Für  $\rho \in V := \{\mu \in H^{1/2}(\Gamma) : (\mu, \mathcal{V}^{-1}1)_\Gamma = 0\}$  gilt

$$(1 - c_K)\|\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}} \leq \|((1 - \sigma)I - \mathcal{K})\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}} \leq c_K\|\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}}$$

mit  $0 < c_K < 1$  aus Satz 6.8.

*Beweis.* Aus

$$\begin{aligned} \|\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}} &= \|((1 - \sigma)I - \mathcal{K})\rho + (\sigma I + \mathcal{K})\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}} \\ &\leq \|((1 - \sigma)I - \mathcal{K})\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}} + \|(\sigma I + \mathcal{K})\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}} \\ &\leq \|((1 - \sigma)I - \mathcal{K})\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}} + c_K\|\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}} \end{aligned}$$

folgt die untere Schranke. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \|((1 - \sigma)I - \mathcal{K})\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}}^2 &= \|(I - (\sigma I + \mathcal{K}))\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}}^2 \\ &= \|\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}}^2 - 2\underbrace{(\mathcal{V}^{-1}(\sigma I + \mathcal{K})\rho, \rho)_\Gamma}_{=\mathcal{W} + (\sigma I + \mathcal{K}^*)\mathcal{V}^{-1}(\sigma I + \mathcal{K})} + \|(\sigma I + \mathcal{K})\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}}^2 \\ &= \|\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}}^2 - 2\underbrace{(\mathcal{W}\rho, \rho)_\Gamma}_{\geq c_E^\mathcal{V}c_E^\mathcal{W}\|\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}}^2} - \|(\sigma I + \mathcal{K})\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}}^2 \\ &\leq \{1 - 2c_E^\mathcal{V}c_E^\mathcal{W} - (1 - c_K)^2\}\|\rho\|_{\mathcal{V}^{-1}}^2. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit der Definition von  $c_K$  bestätigt die Identität  $c_K^2 = 1 - 2c_E^\mathcal{V}c_E^\mathcal{W} - (1 - c_K)^2$ , womit wir auch die obere Schranke gezeigt haben.  $\square$

Unter Verwendung der Kontraktionseigenschaft des Doppelschichtoperators kann eine entsprechende Kontraktionseigenschaft des adjungierten Doppelschichtpotentials gezeigt werden:

**Proposition 6.11** Für alle  $\rho \in V := \{\mu \in H^{-1/2}(\Gamma) : (\mu, 1)_\Gamma = 0\}$  gelten die Abschätzungen

$$(1 - c_K)\|\rho\|_{\mathcal{V}} \leq \|(\sigma I + \mathcal{K}^*)\rho\|_{\mathcal{V}} \leq c_K\|\rho\|_{\mathcal{V}}$$

$$(1 - c_K)\|\rho\|_{\mathcal{V}} \leq \|((1 - \sigma)I - \mathcal{K}^*)\rho\|_{\mathcal{V}} \leq c_K\|\rho\|_{\mathcal{V}}$$

mit  $0 < c_K < 1$  aus Satz 6.8 und  $\|\rho\|_{\mathcal{V}} := \sqrt{(\mathcal{V}\rho, \rho)_\Gamma}$ .

*Beweis.* Sei  $\rho \in V$  und  $\mu := \mathcal{V}\rho \in H^{1/2}(\Gamma)$ . Mit  $\mathcal{V}\mathcal{K}^* = \mathcal{K}\mathcal{V}$  folgt die Gleichung

$$\begin{aligned} \|(\sigma I + \mathcal{K}^*)\rho\|_{\mathcal{V}}^2 &= (\mathcal{V}(\sigma I + \mathcal{K}^*)\mathcal{V}^{-1}\mu, (\sigma I + \mathcal{K}^*)\mathcal{V}^{-1}\mu)_\Gamma \\ &= (\mathcal{V}^{-1}(\sigma I + \mathcal{K})\mu, (\sigma I + \mathcal{K})\mu)_\Gamma \\ &= \|(\sigma I + \mathcal{K})\mu\|_{\mathcal{V}^{-1}}^2. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\|((1 - \sigma)I - \mathcal{K}^*)\rho\|_{\mathcal{V}}^2 = \|((1 - \sigma)I - \mathcal{K})\mu\|_{\mathcal{V}^{-1}}^2.$$

Außerdem gilt

$$\|\rho\|_{\mathcal{V}}^2 = (\mathcal{V}\rho, \rho)_\Gamma = (\mathcal{V}^{-1}\mu, \mu)_\Gamma = \|\mu\|_{\mathcal{V}^{-1}}^2.$$

Beachten wir

$$0 = (\rho, 1)_\Gamma = (\mathcal{V}\rho, \mathcal{V}^{-1}1)_\Gamma = (\mu, \mathcal{V}^{-1}1)_\Gamma,$$

dann ergibt sich schließlich das Behauptete aus Satz 6.8 und Proposition 6.10.  $\square$

**Bemerkung** Aus dem obigen Beweis geht hervor, dass die obere Schranke in der ersten Ungleichungskette sogar für alle  $\rho \in H^{-1/2}(\Gamma)$  erfüllt ist.  $\triangle$

## 7. Randintegralgleichungen

### 7.1 Dirichlet-Problem

Betrachtet wird das Dirichlet-Randwertproblem

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad \gamma_0^{int} u = g \text{ auf } \Gamma.$$

Falls  $d = 2$  ist, wollen wir annehmen, dass  $\text{diam}(\Omega) < 1$  gilt. Spurbildung sowie Bildung der Konormalenableitung in der Darstellungsformel

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} (\gamma_{0,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\gamma_1^{int} u)(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} - \int_{\Gamma} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\gamma_0^{int} u)(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

ergeben das System von Randintegralgleichungen

$$\begin{bmatrix} \gamma_0^{int} u \\ \gamma_1^{int} u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}I - \mathcal{K} & \mathcal{V} \\ \mathcal{W} & \frac{1}{2}I + \mathcal{K}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0^{int} u \\ \gamma_1^{int} u \end{bmatrix} \quad \text{auf } \Gamma. \quad (7.1)$$

Hier haben wir der Einfachheit halber  $1/2$  statt  $\sigma$  geschrieben, was im variationellen Sinn auf Lipschitz-Gebieten stets korrekt ist.

Auflösen der ersten Gleichung nach den Neumann-Daten liefert eine *Fredholmsche Integralgleichung erster Art*

$$\mathcal{V} \gamma_1^{int} u = \left( \frac{1}{2}I + \mathcal{K} \right) g \quad \text{auf } \Gamma. \quad (7.2)$$

Die zugehörige Variationsformulierung lautet:

suche  $\gamma_1^{int} u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ , so dass

$$(\mathcal{V} \gamma_1^{int} u, \mu)_{\Gamma} = \left( \left( \frac{1}{2}I + \mathcal{K} \right) g, \mu \right)_{\Gamma} \quad \text{für alle } \mu \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Da  $\mathcal{V} : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$  nach Satz 6.5 elliptisch ist, folgt nach dem Satz von Lax-Milgram deren eindeutige Lösbarkeit.

Auflösen der zweiten Gleichung aus (7.1) nach den Neumann-Daten führt auf eine *Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art*

$$\left( \frac{1}{2}I - \mathcal{K}^* \right) \gamma_1^{int} u = \mathcal{W} g \quad \text{auf } \Gamma. \quad (7.3)$$

Deren Lösung kann mit Hilfe der Neumannschen Reihe angegeben werden

$$\gamma_1^{int} u = \left( \frac{1}{2}I - \mathcal{K}^* \right)^{-1} \mathcal{W} g = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2}I + \mathcal{K}^* \right)^{\ell} \mathcal{W} g \quad \text{auf } \Gamma.$$

Dabei folgt die Konvergenz der Reihe im  $H^{-1/2}(\Gamma)$  aus Proposition 6.11. Wegen

$$0 = \left\| \left( \frac{1}{2}I - \mathcal{K}^* \right) \gamma_1^{int} u - \mathcal{W}g \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \sup_{\mu \in H^{1/2}(\Gamma) \setminus \{0\}} \frac{((\frac{1}{2}I - \mathcal{K}^*) \gamma_1^{int} u - \mathcal{W}g, \mu)_\Gamma}{\|\mu\|_{H^{1/2}(\Gamma)}},$$

ergibt sich für (7.3) die folgende Variationsformulierung:

$$\begin{aligned} &\text{suche } \gamma_1^{int} u \in H^{-1/2}(\Gamma), \text{ so dass} \\ &\left( \left( \frac{1}{2}I - \mathcal{K}^* \right) \gamma_1^{int} u, \mu \right)_\Gamma = (\mathcal{W}g, \mu)_\Gamma \text{ für alle } \mu \in H^{1/2}(\Gamma). \end{aligned}$$

**Bemerkung** Bei den Randintegralgleichungen (7.2) und (7.3) berechnet man die fehlenden Cauchy-Daten der Lösung  $u$ . Man spricht daher von *direkter Methode*. Bei der nachfolgend vorgestellten *indirekten Methode* wird hingegen ein Potential für die Lösung angesetzt und die unbekannte Dichtefunktion ausgerechnet.  $\triangle$

Man kann auch einen Potentialansatz statt der Darstellungsformel benützen, um geeignete Randintegralgleichungen herzuleiten. Der Einfachschichtpotentialansatz  $u = \tilde{\mathcal{V}}\rho$  mit unbekannter Dichte  $\rho \in H^{-1/2}(\Gamma)$  führt wegen der Spungbedingung auf die Randintegralgleichung

$$\mathcal{V}\rho = g \quad \text{auf } \Gamma,$$

beziehungsweise auf die Variationsformulierung

$$\text{suche } \rho \in H^{-1/2}(\Gamma), \text{ so dass } (\mathcal{V}\rho, \mu)_\Gamma = (g, \mu)_\Gamma \text{ für alle } \mu \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Deren eindeutige Lösbarkeit ergibt sich wieder aus der  $H^{-1/2}(\Gamma)$ -Elliptizität des Einfachschichtoperators.

Dagegen liefert der Doppelschichtpotentialansatz  $u = \tilde{\mathcal{K}}\rho$  mit  $\rho \in H^{1/2}(\Gamma)$  die Randintegralgleichung

$$\left( \frac{1}{2}I - \mathcal{K} \right) \rho = g \quad \text{auf } \Gamma. \quad (7.4)$$

Ähnlich wie oben sieht man ein, dass die Variationsformulierung bezüglich des  $H^{1/2}(\Gamma)$  lautet:

$$\text{suche } \rho \in H^{1/2}(\Gamma), \text{ so dass } \left( \left( \frac{1}{2}I - \mathcal{K} \right) \rho, \mu \right)_\Gamma = (g, \mu)_\Gamma \text{ für alle } \mu \in H^{1/2}(\Gamma).$$

Die eindeutige Lösbarkeit ergibt sich aus der Lösungsdarstellung mittels Neumannscher Reihe

$$\rho = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2}I + \mathcal{K} \right)^\ell g \quad \text{auf } \Gamma.$$

## 7.2 Neumann-Problem

Wir betrachten nun das Neumann-Randwertproblem

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad \gamma_1^{int} u = g \text{ auf } \Gamma,$$



wobei die Kompatibilitätsbedingung

$$\int_{\Gamma} g(\mathbf{x}) \, d\sigma = 0$$

gelte.

Um die Dirichlet-Daten  $\gamma_0^{int} u \in H^{1/2}(\Gamma)$  mittels einer Fredholmschen Integralgleichung erster Art zu bestimmen, kann man die zweite Gleichung aus (7.1) verwenden:

$$\mathcal{W}\gamma_0^{int} u = \left( \frac{1}{2}I - \mathcal{K}^* \right) g \quad \text{auf } \Gamma. \quad (7.5)$$

Wegen  $\text{kern}(\mathcal{W}) = \text{span}\{1\}$ , muss die rechte Seite in  $\text{img}(\mathcal{W}) = \text{kern}(\mathcal{W}^*)^\perp = \text{span}\{1\}^\perp$  liegen. Nachrechnen zeigt, dass dies in der Tat stets erfüllt ist:

$$\left( \left( \frac{1}{2}I - \mathcal{K}^* \right) g, 1 \right)_{\Gamma} = \underbrace{(g, 1)_{\Gamma}}_{=0} - \left( g, \underbrace{\left( \frac{1}{2}I + \mathcal{K} \right) 1}_{=0} \right)_{\Gamma} = 0.$$

Demnach ist gemäß des Satzes von Lax-Milgram die Variationsformulierung

suche  $\gamma_0^{int} u \in V := \{\lambda \in H^{1/2}(\Gamma) : (\lambda, 1)_{\Gamma} = 0\}$ , so dass

$$(\mathcal{W}\gamma_0^{int} u, \mu)_{\Gamma} = \left( \left( \frac{1}{2}I - \mathcal{K}^* \right) g, \mu \right)_{\Gamma} \quad \text{für alle } \mu \in V$$

eindeutig lösbar.

Eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art erhalten wir, indem wir die erste Gleichung aus (7.1) verwenden:

$$\left( \frac{1}{2}I + \mathcal{K} \right) \gamma_0^{int} u = \mathcal{V}g \quad \text{auf } \Gamma. \quad (7.6)$$

Die zugehörige Variationsformulierung im  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{V}^{-1}}$ -Innenprodukt lautet

suche  $\gamma_0^{int} u \in V := \{\lambda \in H^{1/2}(\Gamma) : (\lambda, 1)_{\Gamma} = 0\}$ , so dass

$$\underbrace{\left( \mathcal{V}^{-1} \left( \frac{1}{2}I + \mathcal{K} \right) \gamma_0^{int} u, \mu \right)_{\Gamma}}_{= \mathcal{W} + \left( \frac{1}{2}I + \mathcal{K}^* \right) \mathcal{V}^{-1} \left( \frac{1}{2}I + \mathcal{K} \right)} = (g, \mu)_{\Gamma} \quad \text{für alle } \mu \in V.$$

Existenz und Eindeutigkeit der Lösung liefert der Satz von Lax-Milgram.

Ein Ansatz mittels Einfachschichtpotential  $u = \tilde{\mathcal{V}}\rho$  führt auf die Randintegralgleichung

$$\left( \frac{1}{2}I + \mathcal{K}^* \right) \rho = g \quad \text{auf } \Gamma. \quad (7.7)$$

Es ist  $\text{kern} \left( \frac{1}{2}I + \mathcal{K}^* \right) = \text{span}\{\mathcal{V}^{-1}1\}$ . Aufgrund der Kompatibilitätsbedingung gilt

$$g \in \text{img} \left( \frac{1}{2}I + \mathcal{K}^* \right) = \text{kern} \left( \frac{1}{2}I + \mathcal{K} \right)^\perp = \text{span}\{1\}^\perp.$$

Dies sichert die eindeutige Lösbarkeit, weil nach Proposition 6.11 die Neumannsche Reihe

$$\rho = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2}I - \mathcal{K}^* \right)^{\ell} g$$

bezüglich  $H^{-1/2}(\Gamma)$  konvergiert. Als Variationsformulierung erhalten wir

suche  $\rho \in \{\lambda \in H^{-1/2}(\Gamma) : (\lambda, \mathcal{V}^{-1}1)_{\Gamma} = 0\}$ , so dass

$$\left( \left( \frac{1}{2}I + \mathcal{K}^* \right) \rho, \mu \right)_{\Gamma} = (g, \mu)_{\Gamma} \text{ für alle } \mu \in \{\lambda \in H^{1/2}(\Gamma) : (\lambda, 1)_{\Gamma} = 0\}.$$

Beim Doppelschichtpotentialansatz  $u = \tilde{\mathcal{K}}\rho$  erhalten wir eine Fredholmsche Integralgleichung erster Art für die unbekannte  $\rho \in H^{1/2}(\Gamma)$ :

$$\mathcal{W}\rho = g \quad \text{auf } \Gamma,$$

die analog zu (7.5) behandelt werden kann.

## 7.3 Über Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art

Die numerische Lösung von (7.4) und (7.6) im  $H^{1/2}(\Gamma)$  beziehungsweise von (7.3) und (7.7) im  $H^{-1/2}(\Gamma)$  ist schwierig. Daher formuliert und löst man im allgemeinen eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art  $(\lambda I + K)\rho = g$  bezüglich des  $L^2(\Gamma)$ . Dies ist möglich, wenn der Integraloperator  $K : L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$  kompakt ist. Hinreichend hierfür ist, wenn sein Integrkern  $k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  der Abschätzung

$$\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} |k(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 d\sigma_{\mathbf{y}} d\sigma_{\mathbf{x}} < \infty \quad (7.8)$$

genügt. Ein Integraloperator mit einem solchen Integrkernen heißt *Hilbert-Schmidt-Operator*.

Die Integrkern des Doppelschichtoperators und des adjungierten Doppelschichtoperators erfüllen (7.8), falls die Oberfläche  $C^{1,\alpha}$ -glatt ist, da dann gilt

$$\left| \frac{\langle \mathbf{n}_{\mathbf{x}}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^d} \right|, \left| \frac{\langle \mathbf{n}_{\mathbf{y}}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^d} \right| \leq \frac{c}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{d-1-\alpha}} \quad \text{für alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma.$$

Existenz und Eindeutigkeit der Lösung ergeben sich aus der *Fredholmschen Alternative*: entweder die Lösung  $\rho \in L^2(\Gamma)$  von

$$(\lambda I + K)\rho = g \quad \text{auf } \Gamma$$

ist eindeutig für jede rechte Seite  $g \in L^2(\Gamma)$ , oder  $\lambda$  ist ein Eigenwert von  $K$ . Im zweiten Fall gibt es genau dann  $\dim(\text{kern}(\lambda I + K)) < \infty$  linear unabhängige Lösungen, falls  $g \in \text{img}(\lambda I + K) = \text{kern}(\lambda I + K^*)^{\perp}$  gilt.

## 7.4 Randintegralgleichungen im Außenraum

Randintegralgleichungen sind vorteilhaft zur numerischen Lösung von Randwertproblemen im Außenraum  $\Omega^c := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ , da Fernfeld-Randbedingungen explizit in die Formulierung der zugehörigen Randintegralgleichungen einfließen. Außerdem kann so die Vernetzung des unbeschränkten Außenraums vermieden werden. Als Modellproblem betrachten wir

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega^c, \quad \gamma_0^{ext} u = g \text{ auf } \Gamma$$

mit der *Abklingbedingung*

$$|u(\mathbf{x}) - u_0| = \mathcal{O}(1/\|\mathbf{x}\|) \quad \text{für } \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty. \quad (7.9)$$

Für hinreichend großes  $R > 0$  lautet die Darstellungsformel

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) = & - \int_{\Gamma} (\gamma_{0,\mathbf{y}}^{ext} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\gamma_1^{ext} u)(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} + \int_{\Gamma} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{ext} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\gamma_0^{ext} u)(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \\ & + \int_{\partial B_R(\mathbf{0})} (\gamma_{0,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\gamma_1^{int} u)(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} - \int_{\partial B_R(\mathbf{0})} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\gamma_0^{int} u)(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}}, \\ & \mathbf{x} \in \Omega^c \cap B_R(\mathbf{0}). \end{aligned}$$

Einsetzen von (7.9) liefert für  $R \rightarrow \infty$  die Darstellungsformel im Außenraum

$$u(\mathbf{x}) = u_0 - \int_{\Gamma} (\gamma_{0,\mathbf{y}}^{ext} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\gamma_1^{ext} u)(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} + \int_{\Gamma} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{ext} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\gamma_0^{ext} u)(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega^c.$$

Spurbildung und Bildung der Konormalenableitung in der Darstellungsformel ergeben die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} (\gamma_0^{ext} u)(\mathbf{x}) &= u_0 - (\mathcal{V}\gamma_1^{ext} u)(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x})(\gamma_0^{ext} u)(\mathbf{x}) + (\mathcal{K}\gamma_0^{ext} u)(\mathbf{x}) \\ (\gamma_1^{ext} u)(\mathbf{x}) &= \{1 - \sigma(\mathbf{x})\}(\gamma_1^{ext} u)(\mathbf{x}) - (\mathcal{K}^*\gamma_1^{ext} u)(\mathbf{x}) - (\mathcal{W}\gamma_0^{ext} u)(\mathbf{x}) \end{aligned} \right\} \text{ auf } \Gamma.$$

das heißt, analog zu (7.1) das System von Randintegralgleichungen

$$\begin{bmatrix} \gamma_0^{ext} u \\ \gamma_1^{ext} u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}I + \mathcal{K} & -\mathcal{V} \\ -\mathcal{W} & \frac{1}{2}I - \mathcal{K}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0^{ext} u \\ \gamma_1^{ext} u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{auf } \Gamma.$$

Ausgehend von diesem System lassen sich nun wie im Fall von Randwertproblemen im Innenraum verschiedene Randintegralgleichungen herleiten.

## 7.5 Zusammenfassung

Die in den vorhergehenden Abschnitten vorgestellten Randintegralgleichungen zur Lösung der Laplace-Gleichung fassen wir in folgender Übersicht zusammen:

Problem	Randintegralgleichung	Lösungsdarstellung
inneres Dirichlet-Problem $\Delta u = 0$ in $\Omega$ $\gamma_0^{int} u = g$ auf $\Gamma$	$\mathcal{V}\gamma_1^{int} u = (\frac{1}{2}I + \mathcal{K})g$ $(\frac{1}{2}I - \mathcal{K}^*)\gamma_1^{int} u = \mathcal{W}g$ $\mathcal{V}\rho = g$ $(\frac{1}{2}I - \mathcal{K})\rho = g$	$u = \tilde{\mathcal{V}}\gamma_1^{int} u - \tilde{\mathcal{K}}g$ $u = \tilde{\mathcal{V}}\gamma_1^{int} u - \tilde{\mathcal{K}}g$ $u = \tilde{\mathcal{V}}\rho$ $u = \tilde{\mathcal{K}}\rho$
inneres Neumann-Problem $\Delta u = 0$ in $\Omega$ $\gamma_1^{int} u = g$ auf $\Gamma$ mit $\int_{\Gamma} g(\mathbf{x}) d\sigma = 0$	$\mathcal{W}\gamma_0^{int} u = (\frac{1}{2}I - \mathcal{K}^*)g$ $(\frac{1}{2}I + \mathcal{K})\gamma_0^{int} u = \mathcal{V}g$ $(\frac{1}{2}I + \mathcal{K}^*)\rho = g$ $\mathcal{W}\rho = g$	$u = \tilde{\mathcal{V}}g - \tilde{\mathcal{K}}\gamma_0^{int} u$ $u = \tilde{\mathcal{V}}g - \tilde{\mathcal{K}}\gamma_0^{int} u$ $u = \tilde{\mathcal{V}}\rho$ $u = \tilde{\mathcal{K}}\rho$
äußeres Dirichlet-Problem $\Delta u = 0$ in $\Omega^c$ $\gamma_0^{ext} u = g$ auf $\Gamma$ $ u(\mathbf{x})  = \mathcal{O}(1/\ \mathbf{x}\ )$ für $\ \mathbf{x}\  \rightarrow \infty$ $\ \nabla u(\mathbf{x})\  = \mathcal{O}(1/\ \mathbf{x}\ ^{d-1})$ für $\ \mathbf{x}\  \rightarrow \infty$	$\mathcal{V}\gamma_1^{ext} u = (\mathcal{K} - \frac{1}{2}I)g$ $(\frac{1}{2}I + \mathcal{K}^*)\gamma_1^{ext} u = -\mathcal{W}g$ $\mathcal{V}\rho = g$ $(\frac{1}{2}I + \mathcal{K})\rho = g$	$u = \tilde{\mathcal{V}}\gamma_1^{ext} u - \tilde{\mathcal{K}}g$ $u = \tilde{\mathcal{V}}\gamma_1^{ext} u - \tilde{\mathcal{K}}g$ $u = \tilde{\mathcal{V}}\rho$ $u = \tilde{\mathcal{K}}\rho$
äußeres Neumann-Problem $\Delta u = 0$ in $\Omega$ $\gamma_1^{ext} u = g$ auf $\Gamma$ $ u(\mathbf{x})  = \mathcal{O}(1/\ \mathbf{x}\ )$ für $\ \mathbf{x}\  \rightarrow \infty$ $\ \nabla u(\mathbf{x})\  = \mathcal{O}(1/\ \mathbf{x}\ ^{d-1})$ für $\ \mathbf{x}\  \rightarrow \infty$	$\mathcal{W}\gamma_0^{ext} u = -(\frac{1}{2}I + \mathcal{K}^*)g$ $(\mathcal{K} - \frac{1}{2}I)\gamma_0^{ext} u = \mathcal{V}g$ $(\mathcal{K}^* - \frac{1}{2}I)\rho = g$ $\mathcal{W}\rho = -g$	$u = \tilde{\mathcal{K}}\gamma_0^{ext} u - \tilde{\mathcal{V}}g$ $u = \tilde{\mathcal{K}}\gamma_0^{ext} u - \tilde{\mathcal{V}}g$ $u = \tilde{\mathcal{V}}\rho$ $u = \tilde{\mathcal{K}}\rho$

### Bemerkungen

1. Die Fredholmschen Integralgleichungen erster Art in dieser Tabelle führen allesamt bei der Diskretisierung auf schlecht konditionierte Systemmatrizen, da der Integraloperator glättend beziehungsweise differenzierend wirkt. Hingegen sind die Systemmatrizen zu Fredholmschen Integralgleichungen zweiter Art stets gut konditioniert.
2. Bei der direkten Methode spüren die gesuchten Cauchy-Daten entweder die Singularitäten des Innen- *oder* des Außenraumproblems. Bei der indirekten Methode enthält die gesuchte Dichte die Singularitäten des Innen- *und* des Außenraumproblems.
3. Bis auf das innere Neumann-Problem sind die tabellierten Randwertprobleme eindeutig lösbar. Setzt man beim äußeren Neumann-Problem ebenfalls  $(g, 1)_{\Gamma} = 0$  voraus, so resultiert das verschärfte Abklingverhalten  $|\nabla u(\mathbf{x})| = \mathcal{O}(1/\|\mathbf{x}\|^d)$  für  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ .
4. Beim Einfachschichtpotentialansatz für ein Außenraumproblem im Fall  $d = 2$  muss für die Dichte explizit  $(\rho, 1)_{\Gamma} = 0$  gefordert werden, um das gewünschte Abklingverhalten zu erzielen. Da die entsprechenden Randintegralgleichungen eindeutig lösbar sind falls  $\text{diam}(\Omega) < 1$ , kann man aber einfach im Nachhinein den Mittelwert von der berechneten Dichte abziehen.

5. Wegen  $(\tilde{\mathcal{K}}1)(\mathbf{x}) = 0$  für alle  $\mathbf{x} \in \Omega^c$ , liegt beim Doppelschichtpotentialansatz für ein Außenraumproblem die konstante Dichte stets im Kern der Integralgleichung. Deshalb ergeben sich bei der indirekten Methode im Außenraum zusätzliche Kompatibilitätsbedingungen an die Dirichlet- und Neumann-Daten. Für Neumann-Daten finden wir  $(g, 1)_\Gamma = 0$ , während für die Dirichlet-Daten  $(g, \mathcal{V}^{-1}1)_\Gamma = 0$  gelten muss.
6. Im Gegensatz zum Einfachschichtpotential klingt im Fall  $d = 2$  das Doppelschichtpotential für  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$  für eine beliebige Dichte wie  $\mathcal{O}(1/\|\mathbf{x}\|)$  ab. Im Fall  $d = 3$  ist das Abklingverhalten sogar wie  $\mathcal{O}(1/\|\mathbf{x}\|^2)$ .

△

## 8. Randelemente

### 8.1 Vernetzung

Zur numerischen Approximation der Lösung von Randintegralgleichungen benötigen wir eine systematische Vorgehensweise zur Konstruktion endlichdimensionaler Ansatzräume  $S_h(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$ . Dazu sei  $\Gamma = \partial\Omega \subset \mathbb{R}^d$  stets ein stückweise glatter Lipschitz-Rand.

**Definition 8.1** Eine **Zerlegung**  $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$  in **Randelemente** heißt **zulässig**, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. Es ist  $\Gamma = \bigcup_{i=1}^N T_i$ .
2. Besteht  $T_i \cap T_j$  aus genau einem Punkt, so ist dieser ein Eckpunkt sowohl von  $T_i$  als auch von  $T_j$ .
3. Besteht  $T_i \cap T_j$  aus mehr als einem Punkt, so ist  $T_i \cap T_j$  eine Kante sowohl von  $T_i$  als auch von  $T_j$ .
4. Zu jedem Randelement  $T \in \mathcal{T}$  existiert eine differenzierbare Parametrisierung  $\gamma_T : \Delta \rightarrow T$  bezüglich des **Referenzelements**  $\Delta \subset \mathbb{R}^{d-1}$ , so dass

$$0 < \underline{c}_T \leq \det \gamma_T(\mathbf{s}) \leq \bar{c}_T < \infty \quad \text{für alle } \mathbf{s} \in \Delta. \quad (8.1)$$

**Bemerkung** Im einfachsten Fall sind die Randelemente  $T \in \mathcal{T}$  im Fall  $d = 2$  durch Geradenstücke gegeben beziehungsweise im Fall  $d = 3$  durch ebene Dreiecke.  $\triangle$

Wir betrachten im folgenden *Familien von Zerlegungen*  $\{\mathcal{T}_h\}$ , wobei jedes Element  $T \in \mathcal{T}_h$  einen Durchmesser von höchstens  $2h$  besitzen soll.

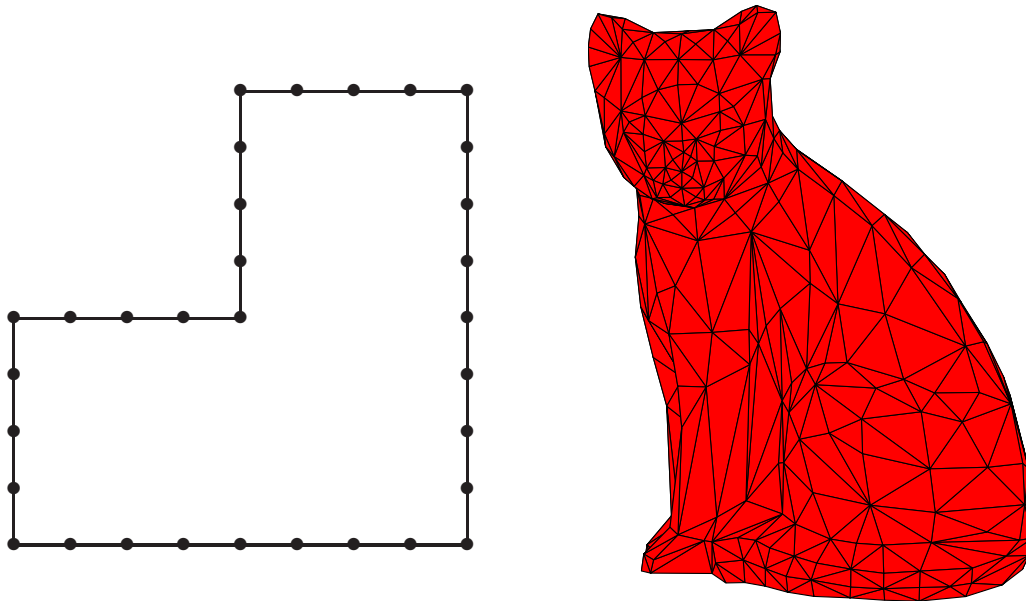
**Definition 8.2** Eine Familie von Zerlegungen  $\{\mathcal{T}_h\}$  heißt **nicht entartet**, wenn die Zahlen  $\bar{c}_T$  und  $\underline{c}_T$  aus (8.1) für alle  $T \in \mathcal{T}_h$  den Abschätzungen

$$\underline{c}_T \geq \frac{h_T^{d-1}}{\kappa} \quad \text{und} \quad h_T^{d-1} \geq \frac{\bar{c}_T}{\kappa} \quad \text{für ein } \kappa > 0$$

genügen. Hierbei bezeichnet  $h_T \leq h$  den halben Durchmesser von  $T$ . Die Familie  $\{\mathcal{T}_h\}$  heißt **quasi-uniform**, falls es eine Zahl  $\kappa > 0$  gibt, so dass für alle  $T \in \mathcal{T}_h$  gilt

$$\underline{c}_T \geq \frac{h^{d-1}}{\kappa} \quad \text{und} \quad h^{d-1} \geq \frac{\bar{c}_T}{\kappa}, \quad \text{wobei } h := \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T.$$

**Beispiel 8.3** Quasi-uniforme Zerlegungen in  $d = 2$  und  $d = 3$  Raumdimensionen:



△

**Bemerkung** Ausgehend von einer zulässigen Zerlegung  $\mathcal{T}$  und der zugehörigen Parametrisierung  $\{\gamma_T\}_{T \in \mathcal{T}}$ , kann man leicht eine quasi-uniforme Familie von Zerlegungen durch sukzessives Unterteilen des Referenzelements  $\triangle$  erzeugen. △

## 8.2 Stückweise konstante Ansatzfunktionen

Bezüglich der Zerlegung  $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$  werden nun Ansatzräume lokal polynomialer Funktionen eingeführt. Dabei beschränkt man sich üblicherweise auf stückweise konstante oder stückweise lineare Ansatzfunktionen.

**Definition 8.4** Zu einer gegebenen Zerlegung  $\mathcal{T}_h = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$  ist der **Raum der stückweise konstanten Ansatzfunktionen** gegeben durch

$$S_h^0(\Gamma) := \text{span}\{\varphi_k^0 : k = 1, 2, \dots, N\},$$

wobei

$$\varphi_k^0(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathbf{x} \in T_k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für eine auf  $\Gamma$  definierte Funktion  $u \in L^2(\Gamma)$  ist die  $L^2(\Gamma)$ -Projektion  $Q_h u \in S_h^0(\Gamma)$  definiert als eindeutige Lösung des Variationsproblems

$$(Q_h u, v_h)_{L^2(\Gamma)} = (u, v_h)_{L^2(\Gamma)} \quad \text{für alle } v_h \in S_h^0(\Gamma).$$

Dies ist äquivalent zur Bestimmung des Koeffizientenvektors  $\mathbf{u} = [u_k]_{k=1}^N$  als Lösung von

$$\sum_{k=1}^N u_k (\varphi_k^0, \varphi_\ell^0)_{L^2(\Gamma)} = (u, \varphi_\ell^0)_{L^2(\Gamma)} \quad \text{für alle } \ell = 1, 2, \dots, N.$$

Wegen

$$(\varphi_k^0, \varphi_\ell^0)_{L^2(\Gamma)} = \int_{\Gamma} \varphi_k^0(\mathbf{x}) \varphi_\ell^0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \begin{cases} |T_k|, & \text{falls } k = \ell, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

ergeben sich die Koeffizienten gemäß

$$u_k = \frac{1}{|T_k|} \int_{T_k} u(\mathbf{x}) \, d\sigma, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

**Lemma 8.5** Die Zerlegung  $\mathcal{T}_h = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$  sei nicht entartet und sei  $s \in [0, 1]$ . Für beliebiges  $u \in H^s(\Gamma)$  gilt dann

$$\|u - Q_h u\|_{L^2(\Gamma)} \leq ch^s |u|_{H^s(\Gamma)}$$

mit einer Konstanten  $c > 0$ , welche nur von  $s$  und  $\kappa$  abhängt.

*Beweis.* Aus der Galerkin-Orthogonalität

$$(u - Q_h u, v_h)_{L^2(\Gamma)} = 0 \quad \text{für alle } v_h \in S_h^0(\Gamma)$$

folgt

$$\begin{aligned} \|u - Q_h u\|_{L^2(\Gamma)}^2 &= (u - Q_h u, u - Q_h u)_{L^2(\Gamma)} \\ &= (u - Q_h u, u)_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \|u - Q_h u\|_{L^2(\Gamma)} \|u\|_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Dies liefert die behauptete Fehlerabschätzung im Fall  $s = 0$ .

Sei nun  $s \in (0, 1)$ . Für  $\mathbf{x} \in T_k$  ist  $(Q_h u)(\mathbf{x}) = u_k$ . Deshalb ergibt sich

$$u(\mathbf{x}) - (Q_h u)(\mathbf{x}) = \frac{1}{|T_k|} \int_{T_k} \{u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})\} \, d\sigma_{\mathbf{y}}. \quad (8.2)$$

Mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgern wir

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{x}) - (Q_h u)(\mathbf{x})|^2 &= \frac{1}{|T_k|^2} \left( \int_{T_k} \{u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})\} \, d\sigma_{\mathbf{y}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{|T_k|^2} \left( \int_{T_k} \frac{u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{(d-1)/2+s}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{(d-1)/2+s} \, d\sigma_{\mathbf{y}} \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{|T_k|^2} \int_{T_k} \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{d-1+2s}} \, d\sigma_{\mathbf{y}} \underbrace{\int_{T_k} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{d-1+2s} \, d\sigma_{\mathbf{y}}}_{\leq (2h_T)^{d-1+2s} |T_k|}. \end{aligned}$$



Aufgrund der Nicht-Entartung ist  $|T_k| \geq |\Delta| h_T^{d-1} / \kappa$ , weshalb sich

$$\int_{T_k} |u(\mathbf{x}) - (Q_h u)(\mathbf{x})|^2 d\sigma \leq \frac{2^{d-1+2s} \kappa}{|\Delta|} h_T^{2s} \int_{T_k} \int_{T_k} \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{d-1+2s}} d\sigma_{\mathbf{y}} d\sigma_{\mathbf{x}} = c h_T^{2s} |u|_{H^s(T_k)}^2$$

ergibt. Aufsummation über alle Elemente liefert die gewünschte Fehlerabschätzung für  $s \in (0, 1)$ .

Im Fall  $s = 1$  beschränken wir uns auf den Nachweis der Behauptung im Fall  $d = 3$ . Der Fall  $d = 2$  lässt sich analog behandeln. Taylor-Entwicklung ergibt

$$u(\gamma_k(\mathbf{t})) - u(\gamma_k(\mathbf{s})) = \int_0^1 \left\langle \nabla_{\mathbf{s}} u(\gamma_k(\mathbf{s} + \xi(\mathbf{t} - \mathbf{s}))), \mathbf{t} - \mathbf{s} \right\rangle d\xi \quad \text{für alle } \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \Delta.$$

Für  $\mathbf{x} = \gamma_k(\mathbf{s}) \in T_k$  folgt daher aus (8.2)

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{x}) - (Q_h u)(\mathbf{x})|^2 &= \frac{1}{|T_k|^2} \left( \int_{\Delta} \{u(\gamma_k(\mathbf{s})) - u(\gamma_k(\mathbf{t}))\} \det \gamma_k d\mathbf{t} \right)^2 \\ &= \frac{1}{|T_k|^2} \left( \int_{\Delta} \int_0^1 \left\langle \nabla_{\mathbf{s}} u(\gamma_k(\mathbf{s} + \xi(\mathbf{t} - \mathbf{s}))), \mathbf{t} - \mathbf{s} \right\rangle d\xi \det \gamma_k d\mathbf{t} \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{|T_k|^2} \int_0^1 \int_{\Delta} \underbrace{\left\| \nabla_{\mathbf{s}} u(\gamma_k(\mathbf{s} + \xi(\mathbf{t} - \mathbf{s}))) \right\|^2}_{\leq \int_{\Delta} \|\nabla_{\mathbf{s}} u(\gamma_k(\mathbf{t}))\|^2 d\mathbf{t}} d\mathbf{t} d\xi \\ &\quad \cdot \underbrace{\int_{\Delta} \|\mathbf{t} - \mathbf{s}\|^2 |\det \gamma_k|^2 d\mathbf{t} d\xi}_{\leq c |T_k|^2} \\ &\leq c \int_{\Delta} \left\| \nabla_{\mathbf{s}} u(\gamma_k(\mathbf{t})) \right\|^2 d\mathbf{t}. \end{aligned}$$

Durch Integration über  $T_k$  ergibt sich

$$\int_{T_k} |u(\mathbf{x}) - (Q_h u)(\mathbf{x})|^2 d\sigma \leq c |T_k| |u|_{H^1(T_k)}^2.$$

Aufsummation unter Beachtung von  $|T_k| \leq \bar{c}_T |\Delta| \leq \kappa |\Delta| h_T^2$  liefert schließlich die Behauptung.  $\square$

**Korollar 8.6** Die Zerlegung  $\mathcal{T}_h$  sei nicht entartet und seien  $t \in [-1, 0]$  und  $s \in [0, 1]$ . Für beliebiges  $u \in H^s(\Gamma)$  gilt dann

$$\|u - Q_h u\|_{H^t(\Gamma)} \leq c h^{s-t} |u|_{H^s(\Gamma)}$$

mit einer Konstanten  $c > 0$ , welche nur von  $s$ ,  $t$  und  $\kappa$  abhängt.

*Beweis.* Im Hinblick auf Lemma 8.5 folgt das Behauptete sofort aus

$$\begin{aligned}
\|u - Q_h u\|_{H^t(\Gamma)} &= \sup_{v \in H^{-t}(\Gamma) \setminus \{0\}} \frac{(u - Q_h u, v)_\Gamma}{\|v\|_{H^{-t}(\Gamma)}} \\
&= \sup_{v \in H^{-t}(\Gamma) \setminus \{0\}} \frac{(u - Q_h u, v - Q_h v)_\Gamma}{\|v\|_{H^{-t}(\Gamma)}} \\
&\leq \sup_{v \in H^{-t}(\Gamma) \setminus \{0\}} \frac{\|u - Q_h u\|_{L^2(\Gamma)} \|v - Q_h v\|_{L^2(\Gamma)}}{\|v\|_{H^{-t}(\Gamma)}} \\
&\leq ch^{s-t} |u|_{H^s(\Gamma)}.
\end{aligned}$$

□

**Satz 8.7 (Approximationseigenschaft von  $S_h^0(\Gamma)$ )** Die Zerlegung  $\mathcal{T}_h$  sei nicht-entartet und seien  $t \in [-1, 0]$  und  $s \in [t, 1]$ . Für beliebiges  $u \in H^s(\Gamma)$  gilt dann

$$\inf_{u_h \in S_h^0(\Gamma)} \|u - u_h\|_{H^t(\Gamma)} \leq ch^{s-t} |u|_{H^s(\Gamma)}$$

mit einer Konstanten  $c > 0$ , welche nur von  $s$ ,  $t$  und  $\kappa$  abhängt.

*Beweis.* Im Fall  $s \in [0, 1]$  ist die Aussage bereits in Korollar 8.6 bewiesen worden. Daher können wir uns auf die Situation  $t \in [-1, 0)$  und  $s \in [t, 0)$  beschränken.

Zu gegebenem  $u \in H^t(\Gamma)$  bezeichne  $Q_h^t u \in S_h^0(\Gamma)$  die  $H^t(\Gamma)$ -Projektion, gegeben durch das Variationsproblem

$$\text{suche } Q_h^t u \in S_h^0(\Gamma), \text{ so dass } (Q_h^t u, v_h)_{H^t(\Gamma)} = (u, v_h)_{H^t(\Gamma)} \text{ für alle } v_h \in S_h^0(\Gamma).$$

Wie im Fall der  $L^2(\Gamma)$ -Projektion gilt

$$\|u - Q_h^t u\|_{H^t(\Gamma)} \leq \|u\|_{H^t(\Gamma)}.$$

Demnach ist  $I - Q_h^t : H^t(\Gamma) \rightarrow H^t(\Gamma)$  stetig mit der Norm

$$\|I - Q_h^t\|_{H^t(\Gamma) \rightarrow H^t(\Gamma)} \leq 1.$$

Andererseits gilt im Fall von  $u \in L^2(\Gamma)$  aufgrund der Optimalität der Orthoprojektion

$$\|u - Q_h^t u\|_{H^t(\Gamma)} \leq \|u - Q_h u\|_{H^t(\Gamma)} \leq ch^{-t} \|u\|_{L^2(\Gamma)},$$

das heißt,  $I - Q_h^t : L^2(\Gamma) \rightarrow H^t(\Gamma)$  ist ebenfalls stetig mit der Norm

$$\|I - Q_h^t\|_{L^2(\Gamma) \rightarrow H^t(\Gamma)} \leq ch^{-t}.$$

Interpolation<sup>1)</sup> liefert schließlich die Behauptung:

$$\|I - Q_h^t\|_{H^s(\Gamma) \rightarrow H^t(\Gamma)} \leq \underbrace{\|I - Q_h^t\|_{H^t(\Gamma) \rightarrow H^t(\Gamma)}^{s/t}}_{\leq 1} \underbrace{\|I - Q_h^t\|_{L^2(\Gamma) \rightarrow H^t(\Gamma)}^{(t-s)/t}}_{\leq (ch^{-t})^{(t-s)/t}} \leq ch^{s-t}.$$

□

<sup>1)</sup>Ist  $A$  stetig als Operator  $A : H^\alpha(\Gamma) \rightarrow H^\beta(\Gamma)$  und ebenfalls als Operator  $A : H^{\bar{\alpha}}(\Gamma) \rightarrow H^{\bar{\beta}}(\Gamma)$ , dann ist  $A : H^\alpha(\Gamma) \rightarrow H^\beta(\Gamma)$  sogar stetig für alle  $\underline{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$  zur Norm

$$\|A\|_{H^\alpha(\Gamma) \rightarrow H^\beta(\Gamma)} \leq \|A\|_{H^{\underline{\alpha}}(\Gamma) \rightarrow H^{\underline{\beta}}(\Gamma)}^{(\bar{\alpha}-\alpha)/(\bar{\alpha}-\underline{\alpha})} \|A\|_{H^{\bar{\alpha}}(\Gamma) \rightarrow H^{\bar{\beta}}(\Gamma)}^{(\alpha-\underline{\alpha})/(\bar{\alpha}-\underline{\alpha})}.$$

## 8.3 Stückweise lineare Ansatzfunktionen

Stückweise konstante Ansatzfunktionen sind geeignet zur Diskretisierung von Funktionen sowohl im  $H^{-1/2}(\Gamma)$  als auch im  $L^2(\Gamma)$ . Als nächstes wollen wir stückweise lineare Ansatzfunktionen einführen, welche benötigt werden, um Funktionen im  $H^{1/2}(\Gamma)$  diskretisieren zu können.

**Definition 8.8** Zu einer gegebenen Zerlegung  $\mathcal{T}_h = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$  mit den Knoten  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_M\}$  ist der **Raum der stückweise linearen Ansatzfunktionen** gegeben durch

$$S_h^1(\Gamma) := \text{span}\{\varphi_k^1 : k = 1, 2, \dots, M\} \subset C(\Gamma),$$

wobei

$$\varphi_k^1(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathbf{x} = \mathbf{x}_k, \\ 0, & \text{falls } \mathbf{x} = \mathbf{x}_\ell \neq \mathbf{x}_k, \\ \text{linear,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine Funktion  $u_h \in S_h^1(\Gamma)$  ist demnach eindeutig durch ihre Knotenwerte bestimmt. Durch den Übergang in die Parameterdarstellung folgt

$$u_h(\mathbf{x}) = u_h(\gamma_T(\mathbf{s})) = \tilde{u}_h(\mathbf{s}) \quad \text{für } \mathbf{s} \in \Delta \text{ und } \mathbf{x} = \gamma_T(\mathbf{s}).$$

Dies bedeutet, ein Randelement  $T \in \mathcal{T}_h$  stimmt mit einem finiten Element im Parameterbereich überein. Folglich lassen sich alle bekannten lokalen Fehlerabschätzungen übertragen und wir erhalten:

**Lemma 8.9** Seien  $\Gamma = \partial\Omega$  hinreichend glatt und  $I_h u$  die lineare Interpolierende mit  $(I_h u)(\mathbf{x}_k) = u(\mathbf{x}_k)$  für alle Knoten  $\mathbf{x}_k$  einer nicht entarteten Zerlegung  $\mathcal{T}_h = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ . Für alle  $u \in H^2(\Gamma)$  gelten dann die Fehlerabschätzungen

$$\|u - I_h u\|_{H^1(\Gamma)} \leq ch|u|_{H^2(\Gamma)}, \quad \|u - I_h u\|_{L^2(\Gamma)} \leq ch^2|u|_{H^2(\Gamma)}. \quad (8.3)$$

Die  $L^2(\Gamma)$ -Projektion  $Q_h : L^2(\Gamma) \rightarrow S_h^1(\Gamma)$  ist gegeben durch das Variationsproblem

$$\text{suche } Q_h u \in S_h^1(\Gamma), \text{ so dass } (Q_h u, v_h)_{L^2(\Gamma)} = (u, v_h)_{L^2(\Gamma)} \text{ für alle } v_h \in S_h^1(\Gamma).$$

Nach Definition folgen unmittelbar die Abschätzungen

$$\|u - Q_h u\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|u\|_{L^2(\Gamma)}$$

und

$$\|u - Q_h u\|_{L^2(\Gamma)} \leq c\|u - I_h u\|_{L^2(\Gamma)} \leq ch^2|u|_{H^2(\Gamma)}.$$

Diese Abschätzungen liefern zusammen mit einem Interpolationsargument für alle  $s \in [0, 2]$  sogar

$$\|u - Q_h u\|_{L^2(\Gamma)} \leq ch^s|u|_{H^s(\Gamma)}.$$

Anwenden des Dualitätsarguments aus Korollar 8.6 liefert schließlich für alle  $t \in [-2, 0]$  und  $s \in [0, 2]$  die Fehlerabschätzung

$$\|u - Q_h u\|_{H^t(\Gamma)} \leq ch^{s-t} |u|_{H^s(\Gamma)}. \quad (8.4)$$

**Satz 8.10 (Approximationseigenschaft von  $S_h^1(\Gamma)$ )** Die Zerlegung  $\mathcal{T}_h$  sei nicht entartet und seien  $t \in [-2, 1]$  und  $s \in [t, 2]$ . Für beliebiges  $u \in H^s(\Gamma)$  gilt dann

$$\inf_{u_h \in S_h^1(\Gamma)} \|u - u_h\|_{H^t(\Gamma)} \leq ch^{s-t} \|u\|_{H^s(\Gamma)}$$

mit einer Konstanten  $c > 0$ , welche nur von  $s$ ,  $t$  und  $\kappa$  abhängt.

*Beweis.* Zu gegebenem  $u \in H^t(\Gamma)$  bezeichne  $Q_h^t u \in S_h^1(\Gamma)$  die  $H^t(\Gamma)$ -Projektion auf  $S_h^1(\Gamma)$ , welche durch das Variationsproblem

$$\text{suche } Q_h^t u \in S_h^1(\Gamma), \text{ so dass } (Q_h^t u, v_h)_{H^t(\Gamma)} = (u, v_h)_{H^t(\Gamma)} \text{ für alle } v_h \in S_h^1(\Gamma)$$

gegeben ist. Dann gilt

$$\|u - Q_h^t u\|_{H^t(\Gamma)} \leq \|u\|_{H^t(\Gamma)}.$$

Ist  $t \in [-2, 0]$ , dann finden wir

$$\|u - Q_h^t u\|_{H^t(\Gamma)} \leq \|u - Q_h u\|_{H^t(\Gamma)} \leq ch^{2-t} \|u\|_{H^2(\Gamma)}.$$

Da für alle  $t \in [0, 1]$  per Interpolationsargument aus (8.3) die Fehlerabschätzung

$$\|u - I_h u\|_{H^t(\Gamma)} \leq ch^{2-t} |u|_{H^2(\Gamma)}$$

folgt, schließen wir außerdem

$$\|u - Q_h^t u\|_{H^t(\Gamma)} \leq \|u - I_h u\|_{H^t(\Gamma)} \leq ch^{2-t} \|u\|_{H^2(\Gamma)}.$$

Analog zum Beweis von Satz 8.7 ergibt Interpolation nun das Behauptete.  $\square$

## 8.4 Dirichlet-zu-Neumann-Abbildung

Wir wollen die Spezialitäten der Fehleranalyse für Randelementmethoden anhand zweier konkreter Beispiele veranschaulichen. Zunächst betrachten wir das Dirichlet-Randwertproblem

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad \gamma_0^{int} u = g \text{ auf } \Gamma. \quad (8.5)$$

Falls  $d = 2$  ist, wollen wir annehmen, dass  $\text{diam}(\Omega) < 1$  gilt, was sicherstellt, dass der Einfachschichtoperator  $\mathcal{V} : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$  elliptisch ist. Die Lösung  $u \in H^1(\Omega)$  zu (8.5) ist gegeben durch die Darstellungsformel

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} (\gamma_{0,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\gamma_1^{int} u)(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} - \int_{\Gamma} (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (8.6)$$

wobei sich die Neumann-Daten  $t := \gamma_1^{int} u$  aus der Dirichlet-zu-Neumann-Abbildung

$$\mathcal{V}t = \left( \frac{1}{2}I + \mathcal{K} \right) g \quad \text{auf } \Gamma \quad (8.7)$$

ergeben. Wir verwenden das Galerkin-Verfahren im Raum der stückweise konstanten Ansatzfunktionen  $S_h^0(\Gamma) = \text{span}\{\varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots, \varphi_N^0\}$ :

$$\text{suche } t_h \in S_h^0(\Gamma), \text{ so dass } (\mathcal{V}t_h, v_h)_\Gamma = \left( \left( \frac{1}{2}I + \mathcal{K} \right) g, v_h \right)_\Gamma \text{ für alle } v_h \in S_h^0(\Gamma). \quad (8.8)$$

Der Ansatz

$$t_h = \sum_{i=1}^N t_i \varphi_i^0 \in S_h^0(\Gamma) \quad \text{mit} \quad \mathbf{t}_h = [t_i]_i \in \mathbb{R}^N$$

liefert das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{V}_h \mathbf{t}_h = \mathbf{f}_h$$

mit der Systemmatrix

$$\mathbf{V}_h = [(\mathcal{V}\varphi_j^0, \varphi_i^0)_\Gamma]_{i,j} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

und dem Lastvektor

$$\mathbf{f}_h = \left[ \left( \left( \frac{1}{2}I + \mathcal{K} \right) g, \varphi_i^0 \right)_\Gamma \right]_i \in \mathbb{R}^N. \quad (8.9)$$

Das Céa-Lemma liefert im Hinblick auf Satz 8.7 die Fehlerabschätzung

$$\|t - t_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq ch^{3/2} \|t\|_{H^1(\Gamma)}, \quad (8.10)$$

vorausgesetzt, es gilt  $t \in H^1(\Gamma)$ . Anwenden des Aubin-Nitsche-Tricks liefert sogar die doppelte Ordnung:

$$\|t - t_h\|_{H^{-2}(\Gamma)} \leq ch^3 \|t\|_{H^1(\Gamma)}.$$

Werten wir nun die numerische Lösung  $u_h$  des Randwertproblems (8.5) in einem Punkt  $\mathbf{x} \in \Omega$  mit Hilfe der Darstellungsformel (8.6) aus, so ergibt sich deshalb die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{x}) - u_h(\mathbf{x})| &= \left| \int_\Gamma (\gamma_{0,\mathbf{y}}^{int} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y})(t - t_h)(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \right| \\ &\leq \|G(\mathbf{x}, \cdot)\|_{H^2(\Gamma)} \|t - t_h\|_{H^{-2}(\Gamma)} \\ &\leq ch^3 \|G(\mathbf{x}, \cdot)\|_{H^2(\Gamma)} \|t\|_{H^1(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass sich der Fehler zwischen  $u$  und  $u_h$  im Punkt  $\mathbf{x} \in \Omega$  wie  $\mathcal{O}(h^3)$  verhält, wobei die konkrete Konstante vom Abstand des Punktes  $\mathbf{x}$  zum Rand  $\Gamma$  abhängt.

Das Problem dieser Diskretisierung ist jedoch, dass sich der Lastvektor (8.9) in dieser Form nur schwer ausrechnen lässt, da er einen Integraloperator enthält. Daher wollen wir die Dirichlet-Daten  $g$  durch eine diskrete Version ersetzen, indem wir projizierte Dirichlet-Daten einsetzen. Um eine hinreichende Genauigkeit zu erzielen, benutzen wir die Projektion  $Q_h : L^2(\Gamma) \rightarrow S_h^1(\Gamma)$  auf die stückweise linearen Ansatzfunktionen  $S_h^1(\Gamma) = \text{span}\{\varphi_1^1, \varphi_2^1, \dots, \varphi_M^1\}$ . Wir betrachten demnach die ‘‘gestörte’’ rechte Seite

$$\tilde{f}_h = \left( \frac{1}{2}I + \mathcal{K} \right) Q_h g. \quad (8.11)$$

Diskretisiert bedeutet dies

$$\tilde{\mathbf{f}}_h = \left( \frac{1}{2}\mathbf{N}_h + \mathbf{K}_h \right) \mathbf{M}_h^{-1} \mathbf{g}_h$$

mit

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_h &= [(\varphi_j^1, \varphi_i^0)_\Gamma]_{i,j} \in \mathbb{R}^{N \times M}, & \mathbf{K}_h &= [(\mathcal{K}\varphi_j^1, \varphi_i^0)_\Gamma]_{i,j} \in \mathbb{R}^{N \times M}, \\ \mathbf{M}_h &= [(\varphi_j^1, \varphi_i^1)_\Gamma]_{i,j} \in \mathbb{R}^{M \times M}, & \mathbf{g}_h &= [(g, \varphi_i^1)_\Gamma]_i \in \mathbb{R}^M,\end{aligned}$$

Das Standardwerkzeug, um den Einfluss solcher Diskretisierungsfehler auf die Lösung abzuschätzen, ist das erste Strangsche Lemma:

**Satz 8.11** (erstes Lemma von Strang) Das Variationsproblem

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \text{für } v \in V \quad (8.12)$$

mit der stetigen und elliptischen Bilinearform  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  und der stetigen Linearform  $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$  werde durch eine Folge finiter Probleme ersetzt: Gesucht wird  $u_h \in V_h \subset V$  mit

$$a_h(u_h, v_h) = \ell_h(v_h) \quad \text{für } v_h \in V_h. \quad (8.13)$$

Dabei seien die Bilinearformen  $a_h$  gleichgradig elliptisch, das heißt, es gelte mit einer von  $h$  unabhängigen Zahl  $\alpha$

$$a_h(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|_V^2 \quad \text{für } v_h \in V_h.$$

Dann ist mit einer von  $h$  unabhängigen Zahl  $c$

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|_V \leq c \inf_{v_h \in V_h} & \left\{ \|u - v_h\|_V + \sup_{w_h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_V} \right. \\ & \left. + \sup_{w_h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{|\ell(w_h) - \ell_h(w_h)|}{\|w_h\|_V} \right\}.\end{aligned}$$

*Beweis.* Sei  $v_h \in V_h$ . Wir setzen zur Abkürzung  $w_h = u_h - v_h$  und schließen aus der gleichgradigen Elliptizität zusammen mit (8.12) und (8.13)

$$\begin{aligned}\alpha \|u_h - v_h\|_V^2 &\leq a_h(u_h - v_h, u_h - v_h) \\ &= a_h(u_h - v_h, w_h) \\ &= a(u - v_h, w_h) + \{a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)\} + \{a_h(u_h, w_h) - a(u, w_h)\} \\ &= a(u - v_h, w_h) + \{a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)\} + \{\ell_h(w_h) - \ell(w_h)\}.\end{aligned}$$

Wir dividieren durch  $\|w_h\|_V = \|u_h - v_h\|_V$  und nutzen die Stetigkeit von  $a$  aus:

$$\|u_h - v_h\|_V \leq \frac{c_S}{\alpha} \left( \|u - v_h\|_V + \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_V} + \frac{|\ell(w_h) - \ell_h(w_h)|}{\|w_h\|_V} \right).$$

Es ist  $v_h$  ein beliebiges Element aus  $V_h$ , so dass zusammen mit der Dreiecksungleichung

$$\|u - u_h\|_V \leq \|u - v_h\|_V + \|u_h - v_h\|_V$$

die Behauptung folgt mit  $c = 1 + c_S/\alpha$ . □

Wegen

$$\begin{aligned}
|\ell(w_h) - \ell_h(w_h)| &= \left| \left( \left( \frac{1}{2}I + \mathcal{K} \right) (g - Q_h g), w_h \right)_\Gamma \right| \\
&\leq \left\| \left( \frac{1}{2}I + \mathcal{K} \right) (g - Q_h g) \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \|w_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\
&\leq c \|g - Q_h g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \|w_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\
&\leq ch^{3/2} \|g\|_{H^2(\Gamma)} \|w_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)},
\end{aligned}$$

impliziert das erste Lemma von Strang in der Energienorm die optimale Konvergenzordnung<sup>2)</sup> der approximierten Neumann-Daten:

$$\|t - \tilde{t}_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq ch^{3/2} \{ \|t\|_{H^1(\Gamma)} + \|g\|_{H^2(\Gamma)} \}.$$

Um jedoch mit Hilfe des Aubin-Nitsche-Tricks die Konvergenzordnung zu verdoppeln, müssen wir tiefer in die Trickkiste greifen:

**Satz 8.12** Sei  $\tilde{t}_h$  die Galerkin-Lösung aus (8.8), jedoch mit den projizierten Dirichlet-Daten  $Q_h g \in S_h^1(\Gamma)$  anstelle der exakten Dirichlet-Daten  $g$ . Seien ferner  $\mathcal{V} : H^1(\Gamma) \rightarrow H^2(\Gamma)$  stetig invertierbar und  $1/2I + \mathcal{K} : H^{-1}(\Gamma) \rightarrow H^{-1}(\Gamma)$  stetig. Dann gilt

$$\|t - \tilde{t}_h\|_{H^{-2}(\Gamma)} \leq ch^3 \|g\|_{H^2(\Gamma)}.$$

*Beweis.* Betrachte für ein beliebiges  $w \in H^{1/2}(\Gamma)$  das adjungierte Problem

$$\text{suche } \phi^w \in H^{-1/2}(\Gamma), \text{ so dass } (\mathcal{V}v, \phi^w)_\Gamma = (v, w)_\Gamma \text{ für alle } v \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Dann gilt für jedes  $\phi_h^w \in S_h^0(\Gamma)$

$$\begin{aligned}
\|t - \tilde{t}_h\|_{H^{-2}(\Gamma)} &= \sup_{w \in H^2(\Gamma) \setminus \{0\}} \frac{(t - \tilde{t}_h, w)_\Gamma}{\|w\|_{H^2(\Gamma)}} = \sup_{w \in H^2(\Gamma) \setminus \{0\}} \frac{(\mathcal{V}(t - \tilde{t}_h), \phi^w)_\Gamma}{\|w\|_{H^2(\Gamma)}} \\
&= \sup_{w \in H^2(\Gamma) \setminus \{0\}} \frac{\overbrace{(\mathcal{V}(t - \tilde{t}_h), \phi_h^w)_\Gamma}^{=(f - \tilde{f}_h, \phi_h^w)_\Gamma}} + (\mathcal{V}(t - \tilde{t}_h), \phi^w - \phi_h^w)_\Gamma}{\|w\|_{H^2(\Gamma)}} \\
&\leq \sup_{w \in H^2(\Gamma) \setminus \{0\}} \frac{(f - \tilde{f}_h, \phi_h^w)_\Gamma}{\|w\|_{H^2(\Gamma)}} + \sup_{w \in H^2(\Gamma) \setminus \{0\}} \frac{(\mathcal{V}(t - \tilde{t}_h), \phi^w - \phi_h^w)_\Gamma}{\|w\|_{H^2(\Gamma)}},
\end{aligned}$$

wobei wir  $f := (1/2I + \mathcal{K})g$  gesetzt haben. Den ersten Term schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
(f - \tilde{f}_h, \phi_h^w)_\Gamma &= (f - \tilde{f}_h, \phi^w)_\Gamma - (f - \tilde{f}_h, \phi^w - \phi_h^w)_\Gamma \\
&\leq \|f - \tilde{f}_h\|_{H^{-1}(\Gamma)} \|\phi^w\|_{H^1(\Gamma)} + \|f - \tilde{f}_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \|\phi^w - \phi_h^w\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}.
\end{aligned}$$

<sup>2)</sup>Man beachte, dass  $g \in H^2(\Gamma)$  notwendig ist, damit  $t \in H^1(\Gamma)$  gilt. Folglich wird hier keinerlei zusätzliche Regularität der Lösung benötigt, um die optimale Konvergenzordnung zu erhalten.

Setzen wir die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|f - \tilde{f}_h\|_{H^{-1}(\Gamma)} &= \left\| \left( \frac{1}{2}I + \mathcal{K} \right) (g - Q_h g) \right\|_{H^{-1}(\Gamma)} \\ &\leq \left\| \frac{1}{2}I + \mathcal{K} \right\|_{H^{-1}(\Gamma) \rightarrow H^{-1}(\Gamma)} \|g - Q_h g\|_{H^{-1}(\Gamma)} \\ &\leq ch^3 \|g\|_{H^2(\Gamma)} \end{aligned}$$

und

$$\|\phi^w\|_{H^1(\Gamma)} = \|\mathcal{V}^{-1}w\|_{H^1(\Gamma)} \leq c \|\mathcal{V}^{-1}\|_{H^2(\Gamma) \rightarrow H^1(\Gamma)} \|w\|_{H^2(\Gamma)}$$

in den ersten Ausdruck ein und wählen wir  $\phi_h^w$  als  $L^2(\Gamma)$ -Projektion von  $\phi^w$  auf die stückweise konstanten Ansatzfunktionen, so erhalten wir

$$(f - \tilde{f}_h, \phi_h^w)_\Gamma \leq ch^3 \|g\|_{H^2(\Gamma)} \|w\|_{H^2(\Gamma)}.$$

Andererseits haben wir aufgrund der Stetigkeit des Einfachschichtoperators

$$(\mathcal{V}(t - \tilde{t}_h), \phi^w - \phi_h^w)_\Gamma \leq c_S^\mathcal{V} \|t - \tilde{t}_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|\phi^w - \phi_h^w\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq ch^3 \|g\|_{H^2(\Gamma)} \|w\|_{H^2(\Gamma)}.$$

Zusammen ergibt sich das Behauptete.  $\square$

**Bemerkung** Man beachte, dass man nur eine quadratische Konvergenzordnung erhält, wenn man statt der Projektion auf die stückweise linearen Ansatzfunktionen nur eine Projektion auf die stückweise konstanten Ansatzfunktionen verwendet.  $\triangle$

## 8.5 Neumann-zu-Dirichlet-Abbildung

Nun betrachten wir das Neumann-Randwertproblem

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad \gamma_1^{\text{int}} u = g \text{ auf } \Gamma, \quad (8.14)$$

wobei die Kompatibilitätsbedingung

$$\int_\Gamma g(\mathbf{x}) \, d\sigma = 0$$

gelte. Die Lösung  $u \in H^1(\Omega)$  zu (8.14) ergibt sich aus der Darstellungsformel

$$u(\mathbf{x}) = \int_\Gamma (\gamma_{0,\mathbf{y}}^{\text{int}} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} - \int_\Gamma (\gamma_{1,\mathbf{y}}^{\text{int}} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\gamma_0^{\text{int}} u)(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (8.15)$$

wobei sich die Dirichlet-Daten  $t := \gamma_0^{\text{int}} u$  aus der Neumann-zu-Dirichlet-Abbildung

$$\mathcal{W}t = \left( \frac{1}{2}I - \mathcal{K}^* \right) g \quad \text{auf } \Gamma \quad (8.16)$$

ergeben. Wir betrachten das Galerkin-Verfahren mit stückweise linearen Ansatzfunktionen:

$$\text{suche } t_h \in S_h^1(\Gamma), \text{ so dass } (\mathcal{W}t_h, v_h)_\Gamma = \left( \left( \frac{1}{2}I - \mathcal{K}^* \right) g, v_h \right)_\Gamma \text{ für alle } v_h \in S_h^1(\Gamma). \quad (8.17)$$



Der Ansatz

$$t_h = \sum_{i=1}^M t_i \varphi_i^1 \in S_h^1(\Gamma) \quad \text{mit} \quad \mathbf{t}_h = [t_i]_i \in \mathbb{R}^M$$

führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{W}_h \mathbf{t}_h = \mathbf{f}_h$$

mit

$$\mathbf{W}_h = [(\mathcal{W}\varphi_j^1, \varphi_i^1)_\Gamma]_{i,j} \in \mathbb{R}^{M \times M}, \quad \mathbf{f}_h = \left[ \left( \left( \frac{1}{2}I - \mathcal{K}^* \right) g, \varphi_i^1 \right)_\Gamma \right]_i \in \mathbb{R}^M.$$

Man beachte hier, dass der konstante Vektor im Kern der Matrix  $\mathbf{W}_h$  liegt. Dies stört jedoch einen iterativen Löser nicht, solange das Startresiduum orthogonal dazu ist.

Falls  $t \in H^2(\Gamma)$  ist, dann liefern Céa-Lemma und Satz 8.10 die Fehlerabschätzung

$$\|t - t_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq ch^{3/2} \|t\|_{H^2(\Gamma)}.$$

Der Aubin-Nitsche-Tricks verdoppelt die Konvergenzordnung:

$$\|t - t_h\|_{H^{-1}(\Gamma)} \leq ch^3 \|t\|_{H^2(\Gamma)}.$$

Bei der punktweisen Auswertung der Darstellungsformel (8.15) kann man demnach wieder die Fehlerordnung  $\mathcal{O}(h^3)$  erzielen.

Um auf der rechten Seite ebenfalls Systemmatrizen zu erhalten, wollen wir dem letzten Abschnitt entsprechend nun projizierte Neumann-Daten  $Q_h g$  einsetzen. Obwohl es nicht die volle Konvergenzordnung liefern wird, wollen wir die Projektion  $Q_h : L^2(\Gamma) \rightarrow S_h^0(\Gamma)$  auf den Raum der stückweise konstanten Ansatzfunktionen verwenden. Dann erhalten wir

$$\tilde{\mathbf{f}}_h = \left( \frac{1}{2} \mathbf{N}_h^T - \mathbf{K}_h^T \right) \mathbf{g}_h$$

mit denselben Matrizen  $\mathbf{N}_h = [n_{i,j}] \in \mathbb{R}^{N \times M}$  und  $\mathbf{K}_h = [k_{i,j}] \in \mathbb{R}^{N \times M}$  wie zuvor und dem Vektor

$$\mathbf{g}_h = [g_i] \in \mathbb{R}^N \quad \text{mit} \quad g_i = \frac{1}{|T_i|} (g, \varphi_i^0)_\Gamma.$$

Bezeichnen wir mit  $f := (1/2I - \mathcal{K}^*)g$  wieder die ungestörte rechte Seite, dann lässt sich die Störung der rechten Seite beschränken gemäß

$$\begin{aligned} |(f - \tilde{f}_h, v_h)_\Gamma| &\leq \|f - \tilde{f}_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|v_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq c \|g - Q_h g\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|v_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq ch^{3/2} \|g\|_{H^1(\Gamma)} \|v_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Gemäß dem Lemma von Strang (Satz 8.11) bleibt demnach die optimale Konvergenzordnung in der Energienorm erhalten. Eine verbesserte Fehlerabschätzung liefert folgender Satz:

**Satz 8.13** Sei  $\tilde{t}_h$  die Galerkin-Lösung aus (8.17), jedoch mit den projizierten Neumann-Daten  $Q_h g \in S_h^0(\Gamma)$  anstelle der exakten Neumann-Daten  $g$ . Seien ferner  $\mathcal{W} : H^1(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$  stetig invertierbar und  $1/2I - \mathcal{K}^* : H^{-1}(\Gamma) \rightarrow H^{-1}(\Gamma)$  stetig.<sup>3)</sup> Dann gilt

$$\|t - \tilde{t}_h\|_{L^2(\Gamma)} \leq ch^2 \|g\|_{H^1(\Gamma)}.$$

*Beweis.* Für beliebiges  $w \in H^{-1/2}(\Gamma)$  bezeichne  $\phi^w \in H^{1/2}(\Gamma)$  die Lösung des adjungierten Problems

$$\text{suche } \phi^w \in H^{1/2}(\Gamma), \text{ so dass } (\mathcal{W}v, \phi^w)_\Gamma = (v, w)_\Gamma \text{ für alle } v \in H^{1/2}(\Gamma).$$

Wir folgern ähnlich wie im Beweis von Satz 8.12

$$\begin{aligned} \|t - \tilde{t}_h\|_{L^2(\Gamma)} &= \sup_{w \in L^2(\Gamma) \setminus \{0\}} \frac{(t - \tilde{t}_h, w)_\Gamma}{\|w\|_{L^2(\Gamma)}} \\ &\leq \sup_{w \in L^2(\Gamma) \setminus \{0\}} \frac{(\mathcal{W}(t - \tilde{t}_h), \phi_h^w)_\Gamma}{\|w\|_{L^2(\Gamma)}} + \sup_{w \in L^2(\Gamma) \setminus \{0\}} \frac{(\mathcal{W}(t - \tilde{t}_h), \phi^w - \phi_h^w)_\Gamma}{\|w\|_{L^2(\Gamma)}} \\ &\leq \sup_{w \in L^2(\Gamma) \setminus \{0\}} \frac{\|f - \tilde{f}_h\|_{H^{-1}(\Gamma)} \|\phi_h^w\|_{H^1(\Gamma)}}{\|w\|_{L^2(\Gamma)}} \\ &\quad + c_S^{\mathcal{W}} \sup_{w \in L^2(\Gamma) \setminus \{0\}} \frac{\|t - \tilde{t}_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \|\phi^w - \phi_h^w\|_{H^{1/2}(\Gamma)}}{\|w\|_{L^2(\Gamma)}}. \end{aligned}$$

Wir wählen  $\phi_h^w \in S_h^1(\Gamma)$  als  $L^2(\Gamma)$ -Projektion von  $\phi^w$ . Dann folgt

$$\|\phi_h^w\|_{H^1(\Gamma)} \leq c \|\phi^w\|_{H^1(\Gamma)}, \quad \|\phi^w - \phi_h^w\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq ch^{1/2} \|\phi^w\|_{H^1(\Gamma)}.$$

Unter Verwendung von

$$\begin{aligned} \|f - \tilde{f}_h\|_{H^{-1}(\Gamma)} &= \left\| \left( \frac{1}{2}I - \mathcal{K}^\star \right) (g - Q_h g) \right\|_{H^{-1}(\Gamma)} \\ &\leq \left\| \frac{1}{2}I - \mathcal{K}^\star \right\|_{H^{-1}(\Gamma) \rightarrow H^{-1}(\Gamma)} \|g - Q_h g\|_{H^{-1}(\Gamma)} \\ &\leq ch^2 \|g\|_{H^1(\Gamma)} \end{aligned}$$

und

$$\|\phi^w\|_{H^1(\Gamma)} = \|\mathcal{W}^{-1}w\|_{H^1(\Gamma)} \leq \|\mathcal{W}^{-1}\|_{L^2(\Gamma) \rightarrow H^1(\Gamma)} \|w\|_{L^2(\Gamma)}$$

ergibt sich daraus die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung** Man beachte, dass man die volle Konvergenzordnung erhält, wenn man statt der Projektion auf die stückweise konstanten Ansatzfunktionen eine Projektion auf die stückweise linearen Ansatzfunktionen verwendet. Bei der hier vorgestellten Diskretisierung haben wir uns jedoch an die Faustregel gehalten, Dirichlet-Daten mit stückweise linearen Ansatzfunktionen und Neumann-Daten mit stückweise konstanten Ansatzfunktionen zu repräsentieren. Dies ist speziell für Gebiete mit Kanten und Ecken sinnvoll.  $\triangle$

## 8.6 Rechentechnische Betrachtungen

Zur Berechnung der Systemmatrix müssen die lokalen Elementmatrizen gebildet werden. Diese enthalten Doppelintegrale der Form

$$I(T, T') := \int_{\Delta} \int_{\Delta} k(\gamma_T(\mathbf{s}), \gamma_{T'}(\mathbf{t})) p(\mathbf{s}) q(\mathbf{t}) \det \gamma_T(\mathbf{s}) \det \gamma_{T'}(\mathbf{t}) \, d\mathbf{t} \, d\mathbf{s}.$$

<sup>3)</sup>Diese Voraussetzungen an die Integraloperatoren gelten bereits im Fall eines Lipschitz-Gebiets.

Dabei bezeichnen  $p, q$  Polynome, welche als Platzhalter für die lokalen Formfunktionen dienen. In der Praxis werden oftmals die exakten Elementabbildungen  $\gamma_T$  durch affine Abbildungen ersetzt, was gleichbedeutend mit einer Approximation der Oberfläche durch ebene Dreiecke ist. Dies ist in der Tat völlig ausreichend, wenn man sich an die Faustregel hält, Dirichlet-Daten durch stückweise lineare Ansatzfunktionen und Neumann-Daten durch stückweise konstante Ansatzfunktionen zu repräsentieren.

Weil der Kern  $k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  singularär ist für  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , muss der Quadraturgrad  $g$  zur numerischen Berechnung des Integrals  $I(T, T')$  logarithmisch zur Singularität hin angehoben werden. Bezeichnet

$$\text{dist}(T, T') := \min_{\mathbf{x} \in T, \mathbf{y} \in T'} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

den Abstand der Randelemente  $T$  und  $T'$ , dann ist die Wahl

$$g \sim |\log(\text{dist}(T, T'))|$$

hinreichend. Auf Dreiecken lassen sich Quadraturformeln mit beliebiger Exaktheit aus Tensorprodukt-Gauß-Quadraturformeln mit Hilfe der unten vorgestellten Duffy-Transformation konstruieren.

Im Fall identischer Elemente  $T = T'$  oder falls die Elemente  $T$  und  $T'$  eine gemeinsame Ecke oder eine gemeinsame Kante besitzen, ist  $\text{dist}(T, T') = 0$  und folglich die Singularität sogar im Integrationsgebiet enthalten. Dann muss man den *Duffy-Trick* anwenden, um das singularäre Integral in ein nichtsingularäres Integral zu transformieren.

Der Duffy-Trick lässt sich folgendermaßen veranschaulichen. Der Integrand des Integrals

$$I := \int_{\Delta} \frac{1}{\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \mathbf{t} \|} dt$$

ist singularär im Punkt  $(1, 0)$ , wenn das Referenzdreieck  $\Delta$  wie üblich das Dreieck mit den Eckpunkten in  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$  ist. Betrachte nun die Transformation

$$\Phi : [0, 1]^2 \rightarrow \Delta, \quad \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \mapsto \Phi(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} 1 - \xi \\ \xi \eta \end{bmatrix},$$

welche das Einheitsquadrat auf das Referenzelement abbildet. Da die Funktionaldeterminante

$$\det \left( \frac{\partial \Phi(\xi, \eta)}{\partial(\xi, \eta)} \right) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \eta & \xi \end{vmatrix} = -\xi$$

ist, erhalten wir

$$I = \int_{[0,1]^2} \frac{\xi}{\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1-\xi \\ \xi\eta \end{bmatrix} \|} d(\xi, \eta) = \int_{[0,1]^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}} d(\xi, \eta).$$

Somit haben wir das singularäre Integral in ein nichtsingularäres transformiert. Basierend auf dieser Idee, kann man entsprechende Integraltransformation angeben, die das im Fall  $T \cap T' \neq \emptyset$  singularäre Integral  $I(T, T')$  in mehrere nichtsingularäre Integrale überführt.

Wir wollen abschließend noch erklären, wie man in drei Raumdimensionen die Systemmatrix  $\mathbf{W}_h$  des hypersingularären Operators aus der Systemmatrix  $\mathbf{V}_h$  des Einfachschichtoperators herleitet. Wir betrachten dazu das Element  $T \in \mathcal{T}_h$  und definieren den ersten Fundamentaltensor der Differentialgeometrie

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{s}) := \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial \gamma_T(\mathbf{s})}{\partial s_1}, \frac{\partial \gamma_T(\mathbf{s})}{\partial s_1} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \gamma_T(\mathbf{s})}{\partial s_1}, \frac{\partial \gamma_T(\mathbf{s})}{\partial s_2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \gamma_T(\mathbf{s})}{\partial s_2}, \frac{\partial \gamma_T(\mathbf{s})}{\partial s_1} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \gamma_T(\mathbf{s})}{\partial s_2}, \frac{\partial \gamma_T(\mathbf{s})}{\partial s_2} \right\rangle \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s} = (s_1, s_2) \in \Delta.$$

Diese Matrix ist symmetrisch und positiv definit mit

$$\det \mathbf{K}_T(\mathbf{s}) = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_T(\mathbf{s})}{\partial s_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_T(\mathbf{s})}{\partial s_2} \right\|^2 > 0.$$

Wir setzen  $\mathbf{x} := \boldsymbol{\gamma}_T(\mathbf{s}) \in T \subset \Gamma$  und schreiben  $\tilde{\rho}(\mathbf{s}) := \rho(\boldsymbol{\gamma}_T(\mathbf{s})) = \rho(\mathbf{x})$ . Der Oberflächengradient  $\nabla_\Gamma \rho$  ist dann gegeben durch

$$\nabla_\Gamma \rho(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_T(\mathbf{s})}{\partial s_1} & \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_T(\mathbf{s})}{\partial s_2} \end{bmatrix} \mathbf{K}_T^{-1}(\mathbf{s}) \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{\rho}(\mathbf{s})}{\partial s_1} \\ \frac{\partial \tilde{\rho}(\mathbf{s})}{\partial s_2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Nachrechnen zeigt, dass sich die Oberflächenrotation  $\text{rot}_\Gamma \rho$  berechnet gemäß

$$\text{rot}_\Gamma \rho(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_\mathbf{x} \times \nabla_\Gamma \rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{K}_T(\mathbf{s})}} \left( \frac{\partial \tilde{\rho}(\mathbf{s})}{\partial s_1} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_T(\mathbf{s})}{\partial s_2} - \frac{\partial \tilde{\rho}(\mathbf{s})}{\partial s_2} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_T(\mathbf{s})}{\partial s_1} \right) \in \mathbb{R}^3.$$

Ist  $\rho_h \in S_h^1(\Gamma)$  nun eine stückweise lineare Ansatzfunktion, so sind die partiellen Ableitungen  $\partial \tilde{\rho}_h / \partial s_i$  auf jedem Element  $T \in \mathcal{T}_h$  konstant. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass  $\boldsymbol{\gamma}_T$  für alle  $T \in \mathcal{T}_h$  affin ist, ist  $\text{rot}_\Gamma \rho_h$  eine elementweise konstante, vektorwertige Funktion. In Anbetracht der Regularisierungsformel aus Satz 5.19 folgern wir deshalb

$$\mathbf{W}_h = \mathbf{C}_{h,1} \mathbf{V}_h \mathbf{C}_{h,1}^T + \mathbf{C}_{h,2} \mathbf{V}_h \mathbf{C}_{h,2}^T + \mathbf{C}_{h,3} \mathbf{V}_h \mathbf{C}_{h,3}^T,$$

wobei die Einträge  $c_{k,\ell}^i$  aus den Matrizen  $\mathbf{C}_{h,i} \in \mathbb{R}^{M \times N}$  jeweils die  $i$ -te Komponente von  $\text{rot}_\Gamma \varphi_k^1$  auf dem Element  $T_\ell \in \mathcal{T}_h$  beinhalten. Insbesondere sind diese Matrizen extrem dünn besetzt.

## 9. Schnelle Randelementmethoden

### 9.1 Niedrigrangapproximation

Die Idee von schnellen Randelementmethoden beruht auf folgender Beobachtung. Ist der Abstand der Punkte  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  hinreichend groß, dann können wir den Kern  $k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  durch Polynome im Raum approximieren:

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \approx k_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq p} k_{\alpha, \beta} \mathbf{x}^\alpha \mathbf{y}^\beta$$

mit

$$|k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - k_p(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq C.$$

Sind nun die Indexmengen  $\nu, \nu'$  so gewählt, dass gilt

$$\text{dist}\{\text{supp } \varphi_i, \text{supp } \varphi_j\} \geq C \quad \text{für alle } i \in \nu \text{ und } j \in \nu',$$

dann lässt sich der Teilblock  $\mathbf{A}_{\nu, \nu'} = [a_{i,j}]_{i \in \nu, j \in \nu'}$  der Systemmatrix berechnen gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\nu, \nu'} &= \left[ \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \, d\sigma_{\mathbf{x}} \right]_{i \in \nu, j \in \nu'} \\ &\approx \left[ \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq p} k_{\alpha, \beta} \int_{\Gamma} \mathbf{x}^\alpha \varphi_i(\mathbf{x}) \, d\sigma_{\mathbf{x}} \int_{\Gamma} \mathbf{y}^\beta \varphi_j(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \right]_{i \in \nu, j \in \nu'} \\ &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq p} k_{\alpha, \beta} \left[ \int_{\Gamma} \mathbf{x}^\alpha \varphi_i(\mathbf{x}) \, d\sigma_{\mathbf{x}} \right]_{i \in \nu} \left[ \int_{\Gamma} \mathbf{y}^\beta \varphi_j(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \right]_{j \in \nu'}^T. \end{aligned}$$

Mit der Kernmatrix

$$\mathbf{K}_p := [k_{\alpha, \beta}]_{|\alpha|, |\beta| \leq p}$$

und den *Momentenmatrizen*

$$\mathbf{M}_{\nu, p} := \left[ \int_{\Gamma} \mathbf{x}^\alpha \varphi_i(\mathbf{x}) \, d\sigma_{\mathbf{x}} \right]_{i \in \nu, |\alpha| \leq p}, \quad \mathbf{M}_{\nu', p} := \left[ \int_{\Gamma} \mathbf{y}^\beta \varphi_j(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \right]_{j \in \nu', |\beta| \leq p}$$

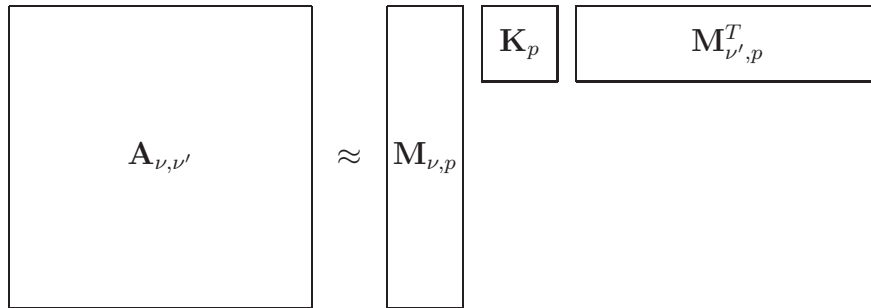
kann die Matrix  $\mathbf{A}_{\nu, \nu'}$  approximativ geschrieben werden als

$$\mathbf{A}_{\nu, \nu'} \approx \mathbf{M}_{\nu, p} \mathbf{K}_p \mathbf{M}_{\nu', p}^T. \quad (9.1)$$

Dabei ist der Fehler in der Frobenius-Norm beschränkt durch

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_{\nu,\nu'} - \mathbf{M}_{\nu,p}\mathbf{K}_p\mathbf{M}_{\nu',p}^T\|_F &= \sqrt{\sum_{\substack{i \in \nu \\ j \in \nu'}} \left[ \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} (k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - k_p(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{x}} \, d\sigma_{\mathbf{y}} \right]^2} \\ &\leq \varepsilon \sqrt{\sum_{\substack{i \in \nu \\ j \in \nu'}} \left[ \int_{\Gamma} |\varphi_i(\mathbf{x})| \, d\sigma_{\mathbf{x}} \int_{\Gamma} |\varphi_j(\mathbf{y})| \, d\sigma_{\mathbf{y}} \right]^2} \\ &\leq c\varepsilon \sqrt{|\nu| \cdot |\nu'|} h^{2(d-1)}. \end{aligned}$$

Man spricht bei (9.1) auch von einer *Niedrigrangapproximation* der Matrix  $\mathbf{A}_{\nu,\nu'}$ , veranschaulicht durch die nachfolgende Skizze:



Die rechte Seite in (9.1) ist weniger als in  $(|\nu| + |\nu'|) \cdot (p+1)^d + (p+1)^{2d}$  Operationen auswertbar, was im Fall  $p \ll |\nu|, |\nu'|$  wesentlich billiger ist als die  $|\nu| \cdot |\nu'|$  Operationen für das Aufstellen von  $\mathbf{A}_{\nu,\nu'}$ .

## 9.2 Clusterbaum

Um die Niedrigrangapproximation (9.1) systematisch ausnutzen zu können, benötigen wir eine geeignete Blockpartition der Systemmatrix. Diese wird mit Hilfe des Clusterbaums konstruiert werden. Dazu bezeichne  $\mathcal{J}_h$  die Menge der Indizes der Basisfunktionen  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathcal{J}_h}$  des Ansatzraums  $S_h(\Gamma)$  zur Zerlegung  $\mathcal{T}_h$ .

**Definition 9.1** Ein **Clusterbaum** ist ein System  $\mathcal{C}$  nichtleerer Indexmengen  $\nu = \{i_0, i_1, \dots, i_\ell\} \subset \mathcal{J}_h$ , welches auch die Menge  $\mathcal{J}_h$  selbst enthält. Ein Element  $\nu \in \mathcal{C}$  heißt **Cluster**. Es heißt **Vatercluster** von  $\nu' \in \mathcal{C}$  (schreibe  $\nu' \prec \nu$ ), falls  $\nu' \subsetneq \nu$  gilt und es keinen weiteren Cluster  $\nu'' \in \mathcal{C}$  gibt, so dass  $\nu' \subsetneq \nu'' \subsetneq \nu$ . Der Cluster  $\nu'$  heißt dann **Sohn** von  $\nu$ . Das **Level** eines Clusters  $\nu$  ist die Zahl  $j$ , so dass Cluster  $\{\nu_i\}_{i=1}^{j-1}$  mit  $\nu \prec \nu_{j-1} \prec \nu_{j-2} \prec \dots \prec \nu_0 = \mathcal{J}_h$  existieren. Wir zählen die Cluster ab und bezeichnen den  $\ell$ -ten Cluster aus Level  $j$  mit  $\nu_{j,\ell}$ .

Die Bezeichnung Clusterbaum wird klar, wenn man die Cluster bezüglich der Relation “ $\prec$ ” anordnet. Für unsere Zwecke ist es notwendig, dass der Clusterbaum die folgenden Eigenschaften besitzt:

- Die Blätter sind die Freiheitsgrade  $i \in \mathcal{J}_h$ .

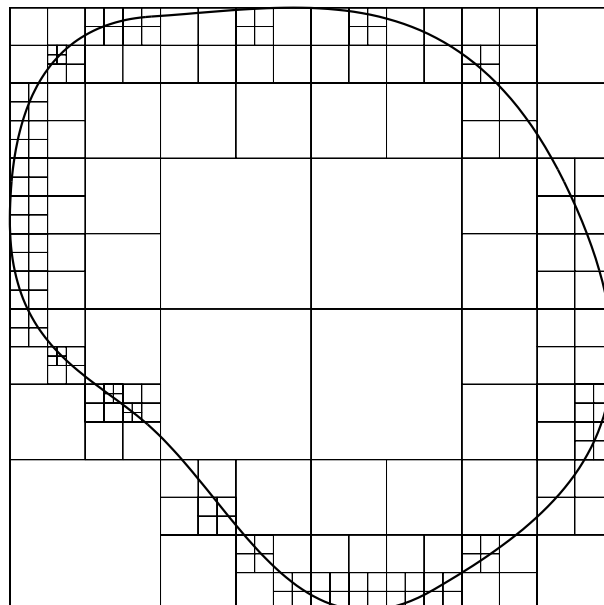
- Der Clusterbaum entspricht asymptotisch einem ausbalancierten  $2^{d-1}$ -Baum, das heißt, die Anzahl der Söhne  $\text{sons}(\nu)$  eines Nicht-Blatt-Clusters  $\nu$  ist ungefähr  $2^{d-1}$ .
- Jedem Cluster kann mittels  $\Gamma_\nu := \bigcup_{i \in \nu} \text{supp}(\varphi_i) \subset \Gamma$  ein Teilstück des Randes zugeordnet werden. Auf Level  $j$  verhält sich der Durchmesser  $\text{diam} \Gamma_\nu$  dieses Teilstücks ungefähr wie  $2^{-j}$ .

Die letzten beiden Aussagen sind natürlich abhängig von dem zu diskretisierenden Rand. Sie setzen eine uniforme Triangulierung eines glatten, hinreichend oft verfeinerten Randes voraus.

Noch ist allerdings unklar, wie wir für eine gegebene Indexmenge  $\mathcal{J}_h$  einen entsprechenden Clusterbaum erzeugen können. Um die vierte Eigenschaft garantieren zu können, ordnen wir jedem Index  $i \in \mathcal{J}_h$  einen Punkt  $\mathbf{x}_i \in \Gamma$  zu. Im Fall von stückweise konstanten Ansatzfunktionen nehmen wir den Mittelpunkt des der Basisfunktion  $\varphi_i^0$  entsprechenden Elements. Im Fall linearer Ansatzfunktionen ist der der Basisfunktion  $\varphi_i^1$  zugeordnete Knoten die kanonische Wahl.

Wir beginnen nun mit dem größten Cluster  $\nu_0 := \mathcal{J}_h$  und bestimmen einen achsenparallelen Quader, der alle Punkte  $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in \mathcal{J}_h}$  enthält. Dieser Quader wird durch Halbieren in jeder Koordinatenrichtung in  $2^d$  kongruente Unterquader zerlegt. Die zugehörigen Sohncluster enthalten dann jeweils die Indizes der in diesen Quadrern enthaltenen Punkte. Anschließend wird für jeden Untercluster, der mehr als  $L$  Punkte enthält, die gleiche Verfeinerung ausgeführt. Leere Sohncluster werden entfernt beziehungsweise gar nicht erst zum Clusterbaum hinzugefügt.

Unter der obigen Annahme, dass der Baum asymptotisch ausbalanciert ist, ist der asymptotische Aufwand des Algorithmus offensichtlich  $\mathcal{O}(|\mathcal{J}_h| \log |\mathcal{J}_h|)$ . Dabei erzeugt der Algorithmus zum Beispiel folgende Clusterstruktur:



## 9.3 Partition der Systemmatrix

Mit Hilfe des Clusterbaums kann nun eine für die Niedrigrangapproximation (9.1) geeignete Blockpartition der Systemmatrix konstruiert werden.

**Definition 9.2** Zu gegebenen Clustern  $\nu, \nu' \in \mathcal{C}$  setzen wir

$$\Gamma_\nu := \bigcup_{i \in \nu} \text{supp } \varphi_i, \quad \Gamma_{\nu'} := \bigcup_{j \in \nu'} \text{supp } \varphi_j.$$

Dann heißen die Cluster  $\nu$  und  $\nu'$  **zulässig**, falls gilt

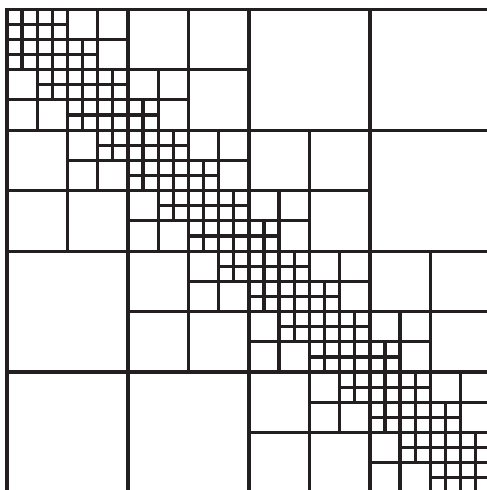
$$\text{dist}(\Gamma_\nu, \Gamma_{\nu'}) \geq \eta \max\{\text{diam } \Gamma_\nu, \text{diam } \Gamma_{\nu'}\}, \quad (9.2)$$

wobei  $\eta > 0$  eine vorgegebene Konstante sei.

Jeder Block  $\mathbf{A}_{\nu, \nu'}$  der Systemmatrix soll einem zulässigen Tupel  $(\nu, \nu')$  von Clustern aus dem Tensorprodukt  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$  des Clusterbaums entsprechen. Um Eindeutigkeit zu erzielen, bestimmt man ausgehend von  $\mathcal{J}_h \times \mathcal{J}_h$  alle zulässigen Tupel  $(\nu_{j,k}, \nu_{j,\ell})$  nach folgender Rekursionsvorschrift: sind die Cluster  $(\nu_{j,k}, \nu_{j,\ell})$  zulässig, dann bilde den Block  $\mathbf{A}_{\nu_{j,k}, \nu_{j,\ell}}$ , ansonsten überprüfe alle Söhne  $(\nu_{j+1,k'}, \nu_{j+1,\ell'}) \in \text{sons}(\nu_{j,k}) \times \text{sons}(\nu_{j,\ell})$  auf Zulässigkeit. Die Rekursion bricht ab, wenn mindestens eines der beiden Cluster ein Blatt des Clusterbaums ist. Dann ist man im *Nahfeld* und muss die Einträge einzeln bilden wie bei der klassischen Randelementmethode.

**Bemerkung** Die so konstruierten Blöcke sind weitestgehend quadratisch, da die Cluster der Ansatz- und Testfunktionen immer vom gleichen Level sind. Außerdem ist die Partition der Systemmatrix symmetrisch.  $\triangle$

**Beispiel 9.3** Im Fall von  $\Gamma = [0, 1]$  erhalten wir beispielsweise die folgende Partition der Systemmatrix:



$\triangle$

Wir wollen die Zahl der Matrixblöcke abschätzen. Jeder Matrixblock entspricht einer zulässigen Cluster-Cluster-Interaktion. Für ein fixiertes Level  $j$  besitzt das Cluster  $\nu_{j,k} \in \mathcal{C}$  nur  $\mathcal{O}(1)$  Nachbarn  $\nu_{j,\ell} \in \mathcal{C}$ , die die Zulässigkeitsbedingung (9.2) verletzen. Da insgesamt  $\mathcal{O}(2^{j(d-1)})$  Cluster auf Level  $j$  vorhanden sind, werden nur  $\mathcal{O}(2^{j(d-1)})$  Cluster-Cluster-Interaktionen nicht gebildet. Für diese werden nun die Interaktionen der jeweiligen Sohncluster untersucht. Da die Zahl der Söhne beschränkt ist, stellen wir fest, dass



wir auf Level  $j$   $\mathcal{O}(2^{j(d-1)})$  Cluster-Cluster-Interaktionen zu untersuchen haben, von denen  $\mathcal{O}(2^{j(d-1)})$  nicht zulässig sind. Also gibt es auf Level  $j$  jeweils  $\mathcal{O}(2^{j(d-1)})$  Cluster-Cluster-Interaktionen, die zulässig sind und daher einem Matrixblock entsprechen. Aufsummieren über  $j$  liefert nun insgesamt  $\mathcal{O}(|\mathcal{J}_h|)$  Matrixblöcke.

Mit  $J$  bezeichnen wir das größte Level im Clusterbaum. Da der Baum ausbalanciert ist, folgt für zulässige Cluster  $\nu_{j,k}$  und  $\nu_{j,\ell}$  vom Level  $j$  die blockweise Fehlerabschätzung

$$\|\mathbf{A}_{\nu_{j,k},\nu_{j,\ell}} - \tilde{\mathbf{A}}_{\nu_{j,k},\nu_{j,\ell}}\|_F \leq c\varepsilon h^{2(d-1)} 2^{(J-j)(d-1)}.$$

Hieraus ergibt sich für den Gesamtfehler der Matrixapproximation

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}}\|_F &\leq \sqrt{\sum_{j=0}^J \underbrace{c 2^{j(d-1)}}_{\text{Anzahl der Blöcke auf Level } j} \underbrace{\left(c\varepsilon h^{2(d-1)} 2^{(J-j)(d-1)}\right)^2}_{\text{Fehler pro Block}}} \\ &\leq c\varepsilon \underbrace{2^{J(d-1)}}_{\leq ch^{-(d-1)}} h^{2(d-1)} \underbrace{\sqrt{\sum_{j=0}^J 2^{-j(d-1)}}}_{\leq c} \\ &\leq c\varepsilon h^{d-1}. \end{aligned}$$

Wenn man beachtet, dass sich  $\|\mathbf{A}\|_F$  selbst wie  $h^{d-1}$  verhält, so sieht man, dass  $\varepsilon \sim h^\sigma$  mit einem geeigneten  $\sigma > 0$  gewählt werden muss.

## 9.4 Kernentwicklung

Wir wollen nun diskutieren, wie eine Niedrigrangapproximation (9.1) erzeugt werden kann. Es gibt die folgenden Möglichkeiten:

- *Tschebyscheff-Interpolation.* Man interpoliert den Integralkern in den den Clustern zugeordneten räumlichen Quadern. Dies hat den Vorteil, dass man ein Black-Box-Verfahren erhält, da man keine explizit auf den Kern zugeschnittene Reihenentwicklung benötigt.
- *Taylor-Entwicklung.* Man verdrahtet die Taylor-Reihe zum gegebenen Kern hart. Diese ist jedoch abhängig vom Kern und bietet gegenüber der Interpolation keinen Vorteil.
- *Multipol-Entwicklung.* Diese Reihenentwicklung nutzt die Kugelflächenfunktionen anstatt räumlicher Polynome als Entwicklungsfunktionen. Dadurch wird inhärent eine Raumdimension eingespart, was die Entwicklung sehr effizient macht. Die Entwicklung muss jedoch für jeden neuen Kern aufgestellt und neu implementiert werden.

Je nach verwendeter Reihendarstellung erhält man einen leicht anderen Abbruchfehler. Unter der Annahme, dass sich die Ableitungen des Kerns abschätzen lassen gemäß

$$|\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \partial_{\mathbf{y}}^\beta k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq c \frac{(|\alpha| + |\beta|)!}{(r \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)^{|\alpha| + |\beta|}} |k(\mathbf{x}, \mathbf{y})|, \quad r > 0,$$

erhält man aber typischerweise eine Fehlerabschätzung der Form

$$\varepsilon \leq c \frac{(\text{diam } \Gamma_\nu)^p (\text{diam } \Gamma_{\nu'})^p}{(r \text{dist}(\Gamma_\nu, \Gamma_{\nu'}))^{2p}} \leq c \left(\frac{1}{r\eta}\right)^{2p}.$$

Folglich muss  $\eta > 1/r$  und  $p \sim |\log(\varepsilon)|$  gewählt werden.

## 9.5 Aufwand

Wie wir in Abschnitt 9.1 gesehen haben, ist die Komplexität zum Aufstellen der Niedrigrangapproximation (9.1) im Block  $\mathbf{A}_{\nu_{j,k}, \nu_{j,\ell}}$  beschränkt durch

$$(|\nu_{j,k}| + |\nu_{j,\ell}|) \cdot (p+1)^d + (p+1)^{2d} \leq c(p+1)^d 2^{(J-j)(d-1)}.$$

Ein Vektor kann mit derselben Komplexität mit dem Block multipliziert werden. Daher ist der Aufwand zum Aufstellen der gesamten Matrixapproximation beziehungsweise für ein Matrix-Vektor-Produkt

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^J \underbrace{c 2^{j(d-1)}}_{\text{Anzahl der Blöcke auf Level } j} \underbrace{c(p+1)^d 2^{(J-j)(d-1)}}_{\text{Aufwand pro Block}} &\leq c(p+1)^d \underbrace{2^{J(d-1)}}_{\leq c|\mathcal{J}_h|} \underbrace{\sum_{j=0}^J 1}_{\leq c \log |\mathcal{J}_h|} \\ &\leq c(p+1)^d |\mathcal{J}_h| \log |\mathcal{J}_h|. \end{aligned}$$

In Anbetracht von  $p \sim |\log \varepsilon| \sim \log |\mathcal{J}_h|$  erhalten wir damit insgesamt den Aufwand  $\mathcal{O}(|\mathcal{J}_h| \log^{d+1} |\mathcal{J}_h|)$ .

### Bemerkungen

1. Das Aufstellen des Nahfelds benötigt zusätzlich den Aufwand  $\mathcal{O}(|\mathcal{J}_h| \log^{2(d-1)} |\mathcal{J}_h|)$ . Im Fall  $d \geq 3$  ist dies dann auch die Gesamtkomplexität der schnellen Randelementmethode.
2. Die Momentenmatrizen in der Niedrigrangapproximation (9.1) müssen nur für die Blätter des Clusterbaums ausgerechnet werden. Für alle andern Cluster können sie daraus dann rekursiv bestimmt werden.
3. Zur Diskretisierung des Doppelschichtoperators benutzt man eine Reihenentwicklung vom Gradienten der Kernfunktion und macht eine vektorwertige Niedrigrangapproximation. Erst zum Schluss wird mit der Normalen multipliziert. Dadurch ist die Reihenentwicklung unabhängig von der aktuellen Geometrie.

△

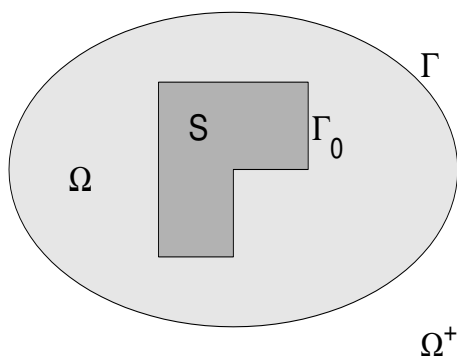
# 10. Kopplung von FEM und BEM

## 10.1 Herleitung

Wir betrachten folgendes Außenraumproblem für ein Lipschitz-Gebiet  $S \subset \mathbb{R}^d$ :

$$\begin{aligned}
 -\Delta u &= f && \text{in } S^c := \mathbb{R}^d \setminus \overline{S}, \\
 \gamma_0^{ext} u &= 0 && \text{auf } \Gamma_0 := \partial S, \\
 |u(\mathbf{x})| &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right) && \text{für } \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty, \\
 \|\nabla u(\mathbf{x})\| &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^{d-1}}\right) && \text{für } \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{10.1}$$

Dabei nehmen wir an, dass der Träger von  $f$  beschränkt ist. Dann können wir ein Lipschitz-Gebiet  $T \subset \mathbb{R}^d$  wählen, das sowohl  $S$  als auch  $\text{supp } f$  in diesem Gebiet enthält. Wir setzen  $\Gamma := \partial T$  und  $\Omega := T \setminus \overline{S}$ . Außerdem bezeichne  $\Omega^+ := T^c$ .



Mit Hilfe der Gebiete  $\Omega$  und  $\Omega^+$  können wir das Randwertproblem (10.1) als *Transmissionsproblem* schreiben:

$$\begin{aligned}
 -\Delta u &= f && \text{in } \Omega, \\
 \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega^+, \\
 \gamma_0^{ext} u &= 0 && \text{auf } \Gamma_0, \\
 \gamma_0^{int} u &= \gamma_0^{ext} u && \text{auf } \Gamma, \\
 \gamma_1^{int} u &= \gamma_1^{ext} u && \text{auf } \Gamma, \\
 |u(\mathbf{x})| &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right) && \text{für } \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty, \\
 \|\nabla u(\mathbf{x})\| &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^{d-1}}\right) && \text{für } \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{10.2}$$

Die Darstellungsformel der Lösung in  $\Omega^+$  lautet

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} (\gamma_1^{ext} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\gamma_0^{ext} u)(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} - \int_{\Gamma} (\gamma_0^{ext} G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\gamma_1^{ext} u)(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega^+.$$

Spurbildung unter Beachtung der Sprungbedingung liefert die Randintegralgleichung

$$\gamma_0^{ext} u = \left( \frac{1}{2} I + \mathcal{K} \right) \gamma_0^{ext} u - \mathcal{V} \gamma_1^{ext} u \quad \text{auf } \Gamma.$$

Um eine stabile Variationsformulierung zu erhalten, bilden wir zusätzlich auch die Konormalenableitung, was auf die Randintegralgleichung

$$\gamma_1^{ext} u = \left( \frac{1}{2} I - \mathcal{K}^* \right) \gamma_1^{ext} u - \mathcal{W} \gamma_0^{ext} u \quad \text{auf } \Gamma$$

führt. In Anbetracht der Transmissionsbedingungen am Rand  $\Gamma$ , können wir (10.2) folglich umformulieren gemäß

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega, \\ \gamma_0^{ext} u &= 0 && \text{auf } \Gamma_0, \\ \gamma_0^{int} u &= \left( \frac{1}{2} I + \mathcal{K} \right) \gamma_0^{int} u - \mathcal{V} \gamma_1^{int} u && \text{auf } \Gamma, \\ \gamma_1^{int} u &= \left( \frac{1}{2} I - \mathcal{K}^* \right) \gamma_1^{int} u - \mathcal{W} \gamma_0^{int} u && \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Um die Abklingbedingung auch im Fall  $d = 2$  zu erfüllen, muss hier noch explizit

$$\int_{\Gamma} (\gamma_1^{int} u)(\mathbf{x}) d\sigma = 0$$

gefordert werden.

## 10.2 Variationsformulierung

Wir setzen

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) := \{w \in H^1(\Omega) : w|_{\Gamma_0} = 0\}.$$

Multiplikation der Lösung  $u \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$  aus (10.3) mit einer beliebigen Funktion  $v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$  liefert unter Beachtung der zweiten Integralgleichung die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \langle \nabla u(\mathbf{x}), \nabla v(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x} - (\gamma_1^{int} u, \gamma_0^{int} v)_{\Gamma} \\ &= \int_{\Omega} \langle \nabla u(\mathbf{x}), \nabla v(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x} + (\mathcal{W} \gamma_0^{int} u, \gamma_0^{int} v)_{\Gamma} - \left( \left( \frac{1}{2} I - \mathcal{K}^* \right) \gamma_1^{int} u, \gamma_0^{int} v \right)_{\Gamma}. \end{aligned}$$

Für die Neumann-Daten  $\gamma_1^{int}u \in H^{-1/2}(\Gamma)$  führen wir die neue Variable  $\rho$  ein. Dann ist (10.3) offensichtlich äquivalent zum Variationsproblem: suche  $(u, \rho) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ , so dass

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u(\mathbf{x}), \nabla v(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x} + (\mathcal{W}\gamma_0^{int}u, \gamma_0^{int}v)_{\Gamma} - \left( \left( \frac{1}{2}I - \mathcal{K}^* \right) \rho, \gamma_0^{int}v \right)_{\Gamma} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (10.4)$$

für alle  $v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ .

Um eine stabile Variationsformulierung zu erhalten, testen wir noch die erste Integralgleichung in (10.3) mit einer Funktion  $\mu \in H^{-1/2}(\Gamma)$  und erhalten die Gleichung

$$0 = (\mathcal{V}\rho, \mu)_{\Gamma} + \left( \left( \frac{1}{2}I - \mathcal{K} \right) \gamma_0^{int}u, \mu \right)_{\Gamma}. \quad (10.5)$$

Nun werden (10.4) und (10.5) einfach addiert. Dies bedeutet, wir definieren die Bilinearform  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  via

$$\begin{aligned} a((u, \rho), (v, \mu)) &:= \int_{\Omega} \langle \nabla u(\mathbf{x}), \nabla v(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x} + (\mathcal{W}\gamma_0^{int}u, \gamma_0^{int}v)_{\Gamma} + (\mathcal{V}\rho, \mu)_{\Gamma} \\ &\quad + \left( \left( \frac{1}{2}I - \mathcal{K} \right) \gamma_0^{int}u, \mu \right)_{\Gamma} - \left( \left( \frac{1}{2}I - \mathcal{K}^* \right) \rho, \gamma_0^{int}v \right)_{\Gamma} \end{aligned} \quad (10.6)$$

die Linearform  $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$  via

$$\ell(v, \mu) := \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (10.7)$$

und betrachten das Variationsproblem

$$\text{suche } (u, \rho) \in V, \text{ so dass } a((u, \rho), (v, \mu)) = \ell(v, \mu) \text{ für alle } (v, \mu) \in V. \quad (10.8)$$

Der zugrundeliegende Hilbert-Raum  $V$  ist der Produktraum

$$V = \{(v, \mu) : v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \text{ und } \mu \in H^{-1/2}(\Gamma)\},$$

wobei im Fall  $d = 2$  noch die zusätzliche Bedingung  $(\mu, 1)_{\Gamma} = 0$  hinzugefügt werden muss. Die kanonische Norm im Produktraum lautet

$$\|(v, \mu)\|_V := \sqrt{\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\mu\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2}.$$

**Satz 10.1** Das Variationsproblem (10.8) ist eindeutig lösbar.

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} |a((u, \rho), (v, \mu))| &\leq |u|_{H^1(\Omega)} |v|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + c_S^{\mathcal{W}} \|\gamma_0^{int}u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \|\gamma_0^{int}v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + c_S^{\mathcal{V}} \|\rho\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|\mu\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\ &\quad + \left( \frac{1}{2} + c_S^{\mathcal{K}} \right) \|\gamma_0^{int}u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \|\mu\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \left( \frac{1}{2} + c_S^{\mathcal{K}^*} \right) \|\rho\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|\gamma_0^{int}v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Mit dem Spursatz und  $c_S^{\mathcal{K}} = c_S^{\mathcal{K}^*}$  folgt hieraus

$$\begin{aligned} |a((u, \rho), (v, \mu))| &\leq (1 + c_\Gamma^2 c_S^{\mathcal{W}}) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + c_S^{\mathcal{V}} \|\rho\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|\mu\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\ &\quad + c_\Gamma \left( \frac{1}{2} + c_S^{\mathcal{K}} \right) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|\mu\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + c_\Gamma \left( \frac{1}{2} + c_S^{\mathcal{K}} \right) \|\rho\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq c_S \| (u, \rho) \|_V \| (v, \mu) \|_V \end{aligned}$$

mit einem geeigneten  $c_S > 0$ . Dies bedeutet, die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  ist stetig auf  $V$ . Sie ist sogar elliptisch, denn es gilt

$$\begin{aligned} a((u, \rho), (u, \rho)) &= \int_{\Omega} \|\nabla u(\mathbf{x})\|^2 \, d\mathbf{x} + (\mathcal{W}\gamma_0^{\text{int}} u, \gamma_0^{\text{int}} u)_{\Gamma} + (\mathcal{V}\rho, \rho)_{\Gamma} \\ &\geq |u|_{H^1(\Omega)}^2 + c_E^{\mathcal{V}} \|\rho\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

In Anbetracht der Poincaré-Friedrichsschen Ungleichung ergibt sich hieraus unmittelbar

$$a((u, \rho), (u, \rho)) \geq c_E \| (u, \rho) \|_V^2.$$

Der Satz von Lax-Milgram liefert schließlich das Behauptete.  $\square$

## 10.3 Diskretisierung

Zur Diskretisierung nehmen wir an, dass  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein Polygonebiet ist, das wir geeignet vernetzen. Dadurch wird der Rand  $\Gamma$  ebenfalls vernetzt. Im Dreidimensionalen erhält man eine Triangulierung des Randes, falls das Gebietsnetz ein Tetraedernetz ist, und eine Quadrangulierung, falls das Gebietsnetz ein Hexaedernetz ist. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass ein Tetraedernetz verwendet wird.

Im Gebiet  $\Omega$  benützen wir stetige, stückweise lineare finite Elemente

$$S_h^1(\Omega) = \text{span}\{\varphi_1^\Omega, \varphi_2^\Omega, \dots, \varphi_{L+M}^\Omega\} \subset H_{\Gamma_0}^1(\Omega).$$

Die Spur einer Ansatzfunktion  $\varphi_k^\Omega \in S_h^1(\Omega)$  ist dann entweder 0 oder eine stetige, stückweise lineare Ansatzfunktion auf dem Rand. Wir wollen annehmen, dass die Indizierung so gewählt ist, dass  $\gamma_0^{\text{int}} \varphi_k^\Omega = 0$  für alle  $1 \leq k \leq L$  ist und  $\gamma_0^{\text{int}} \varphi_{L+1}^\Omega, \gamma_0^{\text{int}} \varphi_{L+2}^\Omega, \dots, \gamma_0^{\text{int}} \varphi_{L+M}^\Omega$  gerade die Basis in  $S_h^1(\Gamma)$  ist. Ferner benötigen wir auf dem Rand den Raum der stückweise konstanten Ansatzfunktionen

$$S_h^0(\Gamma) = \text{span}\{\varphi_1^\Gamma, \varphi_2^\Gamma, \dots, \varphi_N^\Gamma\} \subset H^{-1/2}(\Gamma).$$

Der Ansatz  $u_h = \sum_{k=1}^{L+M} u_k \varphi_k^\Omega \in S_h^1(\Omega)$  und  $\rho_h = \sum_{k=1}^N \rho_k \varphi_k^\Gamma \in S_h^0(\Gamma)$  führt dann auf das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_h^{\Omega, \Omega} & \mathbf{A}_h^{\Gamma, \Omega} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_h^{\Omega, \Gamma} & \mathbf{A}_h^{\Gamma, \Gamma} + \mathbf{W}_h & \mathbf{K}_h^T - \frac{1}{2} \mathbf{N}_h^T \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{N}_h - \mathbf{K}_h & \mathbf{V}_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h^\Omega \\ \mathbf{u}_h^\Gamma \\ \boldsymbol{\rho}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_h^\Omega \\ \mathbf{f}_h^\Gamma \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (10.9)$$

Hierin sind

$$\mathbf{u}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h^\Omega \\ \mathbf{u}_h^\Gamma \end{bmatrix} = [u_k] \in \mathbb{R}^{L+M}, \quad \boldsymbol{\rho}_h = [\rho_k] \in \mathbb{R}^N$$

die Vektoren der Unbekannten. Die Matrix

$$\mathbf{A}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_h^{\Omega,\Omega} & \mathbf{A}_h^{\Gamma,\Omega} \\ \mathbf{A}_h^{\Omega,\Gamma} & \mathbf{A}_h^{\Gamma,\Gamma} \end{bmatrix} = \left[ \int_{\Omega} \langle \nabla \varphi_k^{\Omega}(\mathbf{x}), \nabla \varphi_{\ell}^{\Omega}(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x} \right]_{k,\ell} \in \mathbb{R}^{(L+M) \times (L+M)}$$

ist die kanonische Steifigkeitsmatrix der Finite-Elemente-Methode. Die Matrizen  $\mathbf{W}_h$ ,  $\mathbf{V}_h$ ,  $\mathbf{N}_h$  und  $\mathbf{K}_h$  entsprechen genau den Randelementmatrizen aus Kapitel 8. Die rechte Seite ist gegeben als

$$\mathbf{f}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_h^{\Omega} \\ \mathbf{f}_h^{\Gamma} \end{bmatrix} = \left[ \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \varphi_k^{\Omega}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right]_k \in \mathbb{R}^{L+M}.$$

Aus dem Céa-Lemma erhalten wir sofort eine Fehlerabschätzung für die Galerkin-Lösung:

**Satz 10.2** Es bezeichne  $(u, \rho) \in V$  die Lösung des durch (10.6), (10.7) und (10.8) gegebenen Variationsproblems. Dann genügt die aus dem Gleichungssystem (10.9) berechnete Galerkin-Lösung  $(u_h, \rho_h) \in S_h^1(\Omega) \times S_h^0(\Gamma)$  der Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} + \|\rho - \rho_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq ch \{ \|u\|_{H^2(\Omega)} + \|\rho\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \}.$$

*Beweis.* Das Céa-Lemma liefert die Aussage

$$\|(u, \rho) - (u_h, \rho_h)\|_V \leq \frac{c_S}{c_E} \inf_{(v_h, \mu_h) \in S_h^1(\Omega) \times S_h^0(\Gamma)} \|(u, \rho) - (v_h, \mu_h)\|_V.$$

Beachten wir, dass im Endlichdimensionalen alle Normen äquivalent sind, erhalten wir hieraus in Anbetracht der Approximationseigenschaften der Ansatzräume  $S_h^1(\Omega)$  und  $S_h^0(\Gamma)$  sofort die Behauptung.  $\square$

Mit dem Aubin-Nitsche-Trick lässt sich schließlich die Fehlerordnung noch verdoppeln:

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\rho - \rho_h\|_{H^{-3/2}(\Gamma)} \leq ch^2 \{ \|u\|_{H^2(\Omega)} + \|\rho\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \}.$$