



Projekt.

Bearbeiten bis: **Sonntag, 31.07.2020**

Wellen als physikalisches Phänomen treten in verschiedenen natur- oder ingenieurwissenschaftlichen Anwendungen auf, wie zum Beispiel in der Modellierung für Fragestellungen aus der Akustik, der Seismologie oder der Optik. In diesem Projekt wollen wir uns speziell mit der effizienten Lösung einer Klasse von zeitharmonischen Streuproblemen in zweidimensionalen Gebieten befassen.



Beschreiben wir die Wellenbewegung in einem homogenen Medium im \mathbb{R}^2 mit dessen Geschwindigkeitspotential $U(\mathbf{x}, t)$, so genügt dieses im Medium der *homogenen, dissipativen Wellengleichung*

$$\partial_t^2 U(\mathbf{x}, t) + \gamma \partial_t U(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta_{\mathbf{x}} U(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Dabei bezeichnet $c > 0$ die vorherrschende Wellengeschwindigkeit und $\gamma \geq 0$ die Dämpfungskonstante. Für eine zeitharmonische Welle der Form $U(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ mit der Frequenz $\omega > 0$ folgt dann, dass der ortsabhängige Teil im Medium der *homogenen Helmholtz-Gleichung*

$$\Delta u(\mathbf{x}) + \kappa^2 u(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{\omega(\omega + i\gamma)}{c^2}$$

genügt, wobei offensichtlich $\text{Im } \kappa \geq 0$ gilt.

Modellproblem

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beliebiges, beschränktes Gebiet mit einem C^k -glatten Rand, wobei $k \geq 2$ ist. Sei weiter $\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_r = \Gamma := \partial D$ die Zerlegung des Randes in dessen r Zusammenhangskomponenten und $I \cup J = \{1, \dots, r\}$ eine Zerlegung mit I nichtleer. Dann betrachten wir das Helmholtz-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u(\mathbf{x}) + \kappa^2 u(\mathbf{x}) &= 0 & \text{für } \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}) & \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_D := \bigcup_{l \in I} \Gamma_l, \\ \partial_{\mathbf{n}} u(\mathbf{x}) &= h(\mathbf{x}, \mathbf{n}) & \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_N := \bigcup_{l \in J} \Gamma_l. \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei betrachten wir mit der Wahl von $\Omega = D$ das *Innenraumproblem* respektive mit $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ das *Außenraumproblem*. Wir fordern für das Außenraumproblem weiter die *Sommerfeldsche Abstrahlbedingung*

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}\|^{\frac{1}{2}} (\partial_r - i\kappa) u(\mathbf{x}) = 0 \tag{2}$$

uniform für alle Richtungen $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$. Hierin bezeichnet ∂_r die Radialenrichtungsableitung. Die Fundamentallösung der Helmholtz-Gleichung in zwei Dimensionen, die der Abstrahlbedingung genügt, ist nun durch

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\kappa \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) \quad (3)$$

gegeben, siehe [2, Example 12.14]. Dabei bezeichnen $H_n^{(1)} = J_n + iY_n$ die *Hankel-Funktion* der ersten Art, J_n die *Bessel-Funktion* und Y_n die *Neumann-Funktion* von Ordnung n .

Formulierung als Randintegralgleichungen

Mit der Fundamentallösung zur Hand können wir nun die Randintegraloperatoren und -potentiale einführen. Das *Einfachschichtpotential* $\tilde{\mathcal{V}}: H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega)$ und das *Doppelschichtpotential* $\tilde{\mathcal{K}}: H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega)$ sind durch

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{V}}\rho)(\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \\ \text{und } (\tilde{\mathcal{K}}\rho)(\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}_{\mathbf{y}}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

für $\mathbf{x} \in \Omega$ gegeben. Dazugehörig sind dann der *Einfachschichtoperator* $\mathcal{V}: H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ und der *Doppelschichtoperator* $\mathcal{K}: H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ als

$$\begin{aligned} (\mathcal{V}\rho)(\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \\ \text{und } (\mathcal{K}\rho)(\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}_{\mathbf{y}}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

für $\mathbf{x} \in \Gamma$ definiert. Damit lässt sich nun die Lösung von (1) mit der *Greenschen Darstellungsformel* nun als

$$u = \tilde{\mathcal{V}} \partial_{\mathbf{n}} u - \tilde{\mathcal{K}} u|_{\Gamma} \quad (4)$$

darstellen. Hierzu ist die Kenntnis der vollständigen Cauchy-Daten, d.h. der Dirichlet- und Neumann-Daten, notwendig, welche der *Dirichlet-to-Neumann-Abbildung*

$$\mathcal{V} \partial_{\mathbf{n}} u = \left(\frac{1}{2} I + \mathcal{K} \right) u|_{\Gamma} \quad (5)$$

genügen.

Bei dieser Formulierung ist zu beachten, dass für diejenigen Werte von $\kappa \in \mathbb{R}$, welche ein Eigenwert des Laplace-Problems auf D sind, die Gleichung (5) nicht vollen Rang hat. Da das Aussenraumproblem aber auch für solche κ eine eindeutige Lösung besitzt, bedeutet dies also, dass die Uneindeutigkeit in (5) in diesen Fällen nicht von dem Problem, sondern vom Ansatz für u per Greenscher Darstellungsformel kommt. Dieser Ansatz ist daher für das Aussenraumproblem, wenn nicht bekannt ist, ob das zu betrachtende κ ein Eigenwert des Laplace-Problems auf D ist, eher ungeeignet.

Deshalb wollen wir nun das Aussenraumproblem mit Dirichlet-Randdaten betrachten, das heisst, es sei $J = \emptyset$. Für dieses können wir einen indirekten Ansatz nach Brakhage-Werner benutzen, siehe [1, Abschnitt 3.6], indem wir

$$u = (-\tilde{\mathcal{K}} - i\eta \tilde{\mathcal{V}})\rho \quad (6)$$

ansetzen. Die Dichte $\rho \in H^{1/2}(\Gamma)$ genügt dann der Gleichung

$$\left(\frac{1}{2} I - \mathcal{K} - i\eta \mathcal{V} \right) \rho = u|_{\Gamma}, \quad (7)$$

welche für $\eta \in \mathbb{R}$ mit $\eta \operatorname{Re}(\kappa) > 0$ eindeutig lösbar ist.

Randparametrisierung

Wir beschreiben nun jede Randkomponente Γ_ℓ durch eine C^k -glatte Parametrisierung $\gamma_\ell: [0, 1] \rightarrow \Gamma_\ell$ mit $\gamma_\ell^{(m)}(0) = \gamma_\ell^{(m)}(1)$ für $m = 0, 1, \dots, k$ und $\gamma_\ell'(s) \neq \mathbf{0}$ für $s \in [0, 1]$. Durch Einsetzen der Fundamentallösung und der Parametrisierungen und Transformation aller Funktionen auf $[0, 1]$ erhalten wir für $\ell = 1, \dots, r$ die bekannte Darstellung der Integraloperatoren:

$$(\mathcal{V}\rho)(\gamma_\ell(s)) := \sum_{m=1}^r \int_0^1 k_{\ell,m}^{\mathcal{V}}(s,t) \rho(\gamma_m(t)) dt$$

$$\text{und } (\mathcal{K}\rho)(\gamma_\ell(s)) := \sum_{m=1}^r \int_0^1 k_{\ell,m}^{\mathcal{K}}(s,t) \rho(\gamma_m(t)) dt,$$

wobei die Integralkerne durch

$$k_{\ell,m}^{\mathcal{V}}(s,t) := \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\kappa \|\gamma_\ell(s) - \gamma_m(t)\|) \|\gamma_m'(t)\|$$

$$\text{und } k_{\ell,m}^{\mathcal{K}}(s,t) := \frac{i\kappa}{4} H_1^{(1)}(\kappa \|\gamma_\ell(s) - \gamma_m(t)\|) \frac{\langle \gamma_\ell(s) - \gamma_m(t), \mathbf{n}_{\gamma_m(t)} \rangle}{\|\gamma_\ell(s) - \gamma_m(t)\|} \|\gamma_m'(t)\|$$

gegeben sind.

Aufgrund der Hankel-Funktion der ersten Art von der Ordnung 0 besitzt der Integralkern des Einfachschichtoperators für $\ell = m$ jeweils bei $s = t$ eine logarithmische Singularität. Die Hankel-Funktion der ersten Art von der Ordnung 1 hat im Nullpunkt eine Singularität, welche eine Linearkombination von x^{-1} und $\log x$ ist. Damit ist der Integralkern des Doppelschichtoperators für $\ell = m$ jeweils bei $s = t$ zwar stetig wegen dem weiteren, multiplikativen Term, weist dort aber wegen des Logarithmus-Terms keine reelle Analytizität auf. Daher spalten wir die Kerne für $\ell = m$ wie folgt auf:

$$k_{m,m}^{\mathcal{V}}(s,t) = k_{m,m}^{\mathcal{V},1}(s,t) + k_{m,m}^{\mathcal{V},2}(s,t) \omega(s,t)$$

$$\text{und } k_{m,m}^{\mathcal{K}}(s,t) = k_{m,m}^{\mathcal{K},1}(s,t) + k_{m,m}^{\mathcal{K},2}(s,t) \omega(s,t),$$

wobei

$$\omega(s,t) := -\log(\sin^2(\pi(s-t)))$$

und

$$k_{m,m}^{\mathcal{V},1}(s,t) := \left[\frac{i}{4} H_0^{(1)}(\kappa \|\gamma_m(s) - \gamma_m(t)\|) \right. \\ \left. + \frac{1}{4\pi} J_0(\kappa \|\gamma_m(s) - \gamma_m(t)\|) \log(\sin^2(\pi(s-t))) \right] \|\gamma_m'(t)\|,$$

$$k_{m,m}^{\mathcal{V},2}(s,t) := \frac{1}{4\pi} J_0(\kappa \|\gamma_m(s) - \gamma_m(t)\|) \|\gamma_m'(t)\|,$$

sowie

$$k_{m,m}^{\mathcal{K},1}(s,t) := \left[\frac{i\kappa}{4} H_1^{(1)}(\kappa \|\gamma_m(s) - \gamma_m(t)\|) \right. \\ \left. + \frac{\kappa}{4\pi} J_1(\kappa \|\gamma_m(s) - \gamma_m(t)\|) \log(\sin^2(\pi(s-t))) \right] \\ \cdot \frac{\langle \gamma_m(s) - \gamma_m(t), \mathbf{n}_{\gamma_m(t)} \rangle}{\|\gamma_m(s) - \gamma_m(t)\|} \|\gamma_m'(t)\|,$$

$$k_{m,m}^{\mathcal{K},2}(s,t) := \frac{\kappa}{4\pi} J_1(\kappa \|\gamma_m(s) - \gamma_m(t)\|) \frac{\langle \gamma_m(s) - \gamma_m(t), \mathbf{n}_{\gamma_m(t)} \rangle}{\|\gamma_m(s) - \gamma_m(t)\|} \|\gamma_m'(t)\|$$

sind. Dabei rechnet man leicht nach, dass

$$k_{m,m}^{\mathcal{V},1}(t, t) = \left[\frac{i}{4} - \frac{1}{2\pi} \left(C + \log \frac{\kappa \|\gamma'_m(t)\|}{2\pi} \right) \right] \|\gamma'_m(t)\|,$$

und

$$k_{m,m}^{\mathcal{K},1}(t, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\langle \gamma''_m(t), \mathbf{n}_{\gamma_m(t)} \rangle}{\|\gamma'_m(t)\|}$$

gelten, wobei $C \approx 0.57721\ 56649\ 01532\ 86061$ die Euler-Mascheroni-Konstante ist.

Streuproblem

Für das Streuproblem starten wir vom Geschwindigkeitspotential einer angesetzten, *einfallenden Welle* U_i aus, welche im Medium der inhomogenen, dissipativen Wellengleichung

$$\partial_t^2 U_i(\mathbf{x}, t) + \gamma \partial_t U_i(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta_{\mathbf{x}} U_i(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}, t)$$

genügt. Die dann tatsächlich im Medium beobachtbare, *totale Welle* U genügt ebenfalls der inhomogenen, dissipativen Wellengleichung

$$\partial_t^2 U(\mathbf{x}, t) + \gamma \partial_t U(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta_{\mathbf{x}} U(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}, t).$$

Die Differenz der totalen und der einfallenden Wellen, $U_s := U - U_i$, welche wir als die *gestreute Welle* bezeichnen, muss daher aufgrund der Linearität der Differentialgleichungen der homogenen, dissipativen Wellengleichung

$$\partial_t^2 U_s(\mathbf{x}, t) + \gamma \partial_t U_s(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta_{\mathbf{x}} U_s(\mathbf{x}, t) = 0$$

genügen.

Die Situation überträgt sich analog in den zeitharmonischen Fall: Die einfallende Welle nimmt dann die Form $U_i(\mathbf{x}, t) = u_i(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ an, wobei u_i im Medium der inhomogenen Helmholtz-Gleichung

$$\Delta u_i(\mathbf{x}) + \kappa^2 u_i(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

genügt; ebenso lässt sich die totale Welle als $U(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ schreiben, worin u im Medium die inhomogene Helmholtz-Gleichung

$$\Delta u(\mathbf{x}) + \kappa^2 u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

erfüllen muss. Die gestreute Welle nimmt folglich die Form $U_s(\mathbf{x}, t) = u_s(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ an, womit u_s dann im Medium der homogenen Helmholtz-Gleichung

$$\Delta u_s(\mathbf{x}) + \kappa^2 u_s(\mathbf{x}) = 0$$

genügt.

Um die gestreute Welle also bestimmen zu können, verbleibt es noch, die Randbedingungen für u_s zu spezifizieren. Erfüllt die totale Welle u die Dirichlet-Randbedingung

$$u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_\ell,$$

so muss die gestreute Welle u_s der Dirichlet-Randbedingung

$$u_s(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - u_i(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_\ell$$

genügen. Genügt die totale Welle u hingegen der Neumann-Randbedingung

$$\partial_{\mathbf{n}} u(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_\ell,$$

so erfüllt die gestreute Welle u_s die Neumann-Randbedingung

$$\partial_{\mathbf{n}} u_s(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \partial_{\mathbf{n}} u_i(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma_\ell.$$

Aufgaben

Aufgabe 1.

Zeigen Sie, dass die Kerne $k_{m,m}^{\mathcal{K}}$, $k_{m,m}^{\mathcal{V},1}$, $k_{m,m}^{\mathcal{V},2}$, $k_{m,m}^{\mathcal{K},1}$, $k_{m,m}^{\mathcal{K},2}$ bei $s = t$ stetig sind, indem Sie den Wert jeweils bei $s = t$ bestimmen. Zeigen Sie weiter, dass der Kern $k_{m,m}^{\mathcal{K}}$ bei $s = t$ nicht analytisch ist.

Hinweis. Benutzen Sie die Darstellungen der Bessel-Funktionen per Reihen, siehe [2, Example 12.14].

Aufgabe 2.

Leiten Sie die Nyström-Diskretisierung und die dazugehörige Potentialauswertung für die Gleichungen (4) und (5) sowie (6) und (7) her.

Hinweis. Sie gehen dabei analog wie in den Programmierübungsblättern vor.

Aufgabe 3.

Die Parametrisierungen γ_ℓ der Randkomponenten Γ_ℓ speichern wir als ein **structure array** `mbp` ab. Dieses soll dabei die Felder `gamma`, `dgamma`, `d2gamma` und `ngamma` besitzen, welche **function handles** zu Funktionen sind, die wie folgt vektorwertig auswertbar sein sollen:

$$\begin{aligned}\text{mbp}(\ell).\text{gamma}(n) &= [\gamma_\ell(s_1) \quad \cdots \quad \gamma_\ell(s_n)] \\ \text{mbp}(\ell).\text{dgamma}(n) &= [\gamma'_\ell(s_1) \quad \cdots \quad \gamma'_\ell(s_n)] \\ \text{mbp}(\ell).\text{d2gamma}(n) &= [\gamma''_\ell(s_1) \quad \cdots \quad \gamma''_\ell(s_n)] \\ \text{mbp}(\ell).\text{ngamma}(n) &= [\mathbf{n}_{\gamma_\ell(s_1)} \quad \cdots \quad \mathbf{n}_{\gamma_\ell(s_n)}].\end{aligned}$$

Dabei ist $s_j := (j - 1)/n$.

Um einfach Gebiete mit analytischen Randparametrisierungen erstellen zu können, wollen wir wie folgt vorgehen: Zu N Punkten $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^2$ berechnen wir das vektorwertige, trigonometrische Interpolationspolynom \mathbf{p} mit $\mathbf{p}((j - 1)/n) = \mathbf{v}_j$ für $j = 1, \dots, N$. Wenn sich die Kurve \mathbf{p} nirgendwo berührt oder sich selbst schneidet, so ergibt dies eine analytische Randparametrisierung. Da \mathbf{p} durch eine endliche Fourier-Reihen gegeben ist, können \mathbf{p} aber auch \mathbf{p}' und \mathbf{p}'' als ihre Fourier-Koeffizienten berechnet, gespeichert und ausgewertet werden.

Schreiben Sie eine Funktion

```
function mbp = add_fourier_shape_parametrisation(mbp, vs, no),
```

welche dem **structure array** `mbp` eine wie oben beschriebene Parametrisierung

$$s \mapsto \mathbf{p}(s)$$

in der ebenfalls oben beschriebenen Darstellung anhängt. Dabei soll für `no = 1` der äussere Normalenvektor in Parametrisierungsrichtung auf der rechten Seite und für `no = -1` auf der linken Seite liegen.

Hinweis. Sie finden in der Beilage hierzu vektorwertige Versionen der Funktionen mit Namen `fourier_*` aus den Übungen. Weiter erstellen die Funktionen `generate_*_test_parametrisation` damit eine Reihe von inneren und äusseren Gebietsbeschreibungen. Dies können dann mit `plot_parametrisation` dargestellt werden.

Aufgabe 4.

In der Beilage findet sich die Funktion

```
function dcd = interpolate_cauchy_data(mbp, ns, u, dnu),
```

welche die Randkomponentenbeschreibung per **structure array** `mbp`, einen Zeilenvektor `ns` der Anzahl an Randpunkten, die für jeden jeweiligen Rand benutzt werden sollen, und zwei **function handles** auf Funktionen nimmt, welche eine harmonische Funktion und ihre Normalableitung berechnen. Der Rückgabewert der Funktion ist dann ein **structure array**, welches die vollständigen, aber diskretisierten Cauchy-Daten für jede Randkomponente sowie die diskretisierte Beschreibung der Ränder beinhaltet.

Schreiben Sie dazu passend eine Funktion

```
us = potential_cauchy(dcd, kappa, xs),
```

die mit Hilfe dieser diskreten Daten `dcd` per diskretisierter Version der Potentialauswertung (4) den Wert der Funktion approximativ bei den in den Spalten von `xs` stehenden Punkten rekonstruiert und als Zeilenvektor `us` zurückgibt.

Schreiben Sie weiter ein Skript, welches das asymptotische Fehlerverhalten Ihrer Potentialauswertung überprüft.

Hinweis. In der Beilage finden Sie dazu die Funktionen `generate_quad_mesh` und `cauchy_data_onto_quad_mesh`. Als analytische Lösung benutzen Sie

$$u(\mathbf{x}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\kappa \|\mathbf{x} - \mathbf{d}\|)$$

mit einem $\mathbf{d} \notin \Omega$.

Aufgabe 5.

Schreiben Sie eine Funktion

```
dcd = nystroem_cauchy(mbp, ns, g, h, kappa, btf),
```

welche das Gleichungssystem der Nyström-Diskretisierung von (5) aufstellt und fuer die unbekanntenen Dirchlet- und Neumann-Daten löst.

Die Funktion nimmt dafür die Randkomponentenbeschreibung per **structure array** `mbp`, einen Zeilenvektor `ns` der Anzahl an Randpunkten, die für jeden jeweiligen Rand benutzt werden sollen, zwei **function handles** auf Funktionen, welche die Funktionen `g` für die Dirichletränder respektive die Funktion `h` für die Neumannränder berechnen, sowie der Wert von κ und einen **bool**-Zeilenvektor `btf`, als Eingabevariablen. Dabei ist `btf` an der ℓ -ten Stelle `true`, wenn die ℓ -te Randkomponente mit Dirichlet-Daten versehen wird; ansonsten sollen bei der ℓ -ten Randkomponente Neumann-Daten sein.

Der Rückgabewert der Funktion soll dann ein **structure array** `dcd` sein, mit den gleichen Feldern, wie die, die von der Funktion `interpolate_cauchy_data` berechnet werden. Schreiben Sie auch hierfür ein Skript, welches das asymptotische Fehlerverhalten Ihres Nyström-Verfahrens überprüft.

Aufgabe 6.

Erstellen Sie ausgehend von den Funktionen `potential_cauchy`, `nystroem_cauchy` und `cauchy_data_onto_quad_mesh` die analogen Funktionen für den indirekten Ansatz von Brakhage–Werner. Schreiben Sie weiter ein Skript, welches das asymptotische Fehlerverhalten dieses Ansatzes überprüft.

Aufgabe 7.

Schreiben Sie ein Skript, welches ein zeitharmonisches Streuproblem löst. Die totale Welle soll dabei homogenen Dirichlet-Randdaten genügen. Setzen Sie die einfallende Welle entweder mit

$$u_i(\mathbf{x}) = e^{i\kappa\langle\mathbf{x},\mathbf{d}\rangle}$$

als ebene Welle mit Richtung \mathbf{d} oder mit

$$u_i(\mathbf{x}) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(\kappa\|\mathbf{x} - \mathbf{d}\|)$$

als Kugelwelle mit Quelle \mathbf{d} an.

Aufgabe 8 (Freiwillig). Erstellen Sie eine Animation der einfallenden, gestreuten und totalen Wellen aus Aufgabe 7. ☺

Hinweis. Betrachten Sie dazu die Funktionen `setup_animate_quad_mesh` und `update_animate_quad_mesh` in der Beilage.

Abgabe & Besprechung

Die Abgabe des Projekts soll durch die Abgabe der Codes und eines in \LaTeX verfassten, prägnanten Berichts geschehen. In dem Bericht sollen die aus den Aufgaben erhaltenen Resultate (händische Berechnungen, Konvergenzplots, Visualisierungen, etc.) dargestellt und diskutiert werden. Dabei sind für die numerischen Beispiele auch jeweils deren Aufbau anzugeben.

Für eine nachfolgende Besprechung der Abgabe ist individuell ein Termin mit M. Schmidlin zu vereinbaren.

Literatur

- [1] D. Colton and R. Kress. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2013.
- [2] R. Kress. *Linear Integral Equations*. Springer, New York, 3rd edition, 2014.

