



Programmierblatt 2.

Bearbeiten bis: **Sonntag, 12.04.2020**

Das Ziel dieses zweiten Blattes ist die Betrachtung der Kombination der Darstellung der Lösung als *Einfachschichtpotential* und dem *Nyström-Verfahren* für Integralgleichungen für das Laplace-Problem

$$\begin{aligned}\Delta u(\mathbf{x}) &= 0 && \text{für } \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}) && \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma := \partial\Omega,\end{aligned}$$

für ein beliebiges Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit $\text{diam}(\Omega) < 1$ und mit einem C^k -glattem, beschränkten und zusammenhängenden Rand, wobei $k \geq 1$ ist.

Einfachschichtpotential

Die Lösung dieses Randwertproblems lässt sich mit der Fundamentallösung des Laplace-Operators,

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi} \log\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

als *Einfachschichtpotential*

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} = \int_{\Gamma} \frac{-1}{2\pi} \log\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega$$

darstellen. Um die noch unbekannte Dichte $\rho \in H^{-1/2}(\Gamma)$ bestimmen zu können, lässt sich zeigen, dass diese der Randintegralgleichung

$$\mathcal{V}\rho = g \tag{1}$$

genügen muss. Hierbei ist $\mathcal{V}: H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ der *Einfachschichtoperator*,

$$(\mathcal{V}\rho)(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} = \int_{\Gamma} \frac{-1}{2\pi} \log\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Randparametrisierung

Wie auch schon auf Blatt 1 angesetzt, beschreiben wir den Rand Γ durch die C^k -glatte Parametrisierung $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Gamma$ mit $\gamma^{(n)}(0) = \gamma^{(n)}(1)$ für $n = 0, 1, \dots, k$ und $\gamma'(s) \neq 0$ für $s \in [0, 1]$. Dann erhalten wir mithilfe des Transformationssatzes

$$(\mathcal{V}\rho)(\gamma(s)) = \int_0^1 \frac{-1}{2\pi} \log\|\gamma(s) - \gamma(t)\| \|\gamma'(t)\| \rho(\gamma(t)) \, dt.$$

Offensichtlich ist dabei der Integrand jeweils genau bei der Stelle $t = s$ schwach singular. Wir schreiben deshalb den Logarithmus-Term wie folgt um,

$$\log\|\gamma(s) - \gamma(t)\| = \frac{1}{2} \log \frac{\|\gamma(s) - \gamma(t)\|^2}{\sin^2(\pi(s-t))} + \frac{1}{2} \log(\sin^2(\pi(s-t))),$$

und definieren daraus das parametrisierte Gewicht

$$\omega(s, t) := -\log(\sin^2(\pi(s-t)))$$

und die Integralkerne

$$k_1(s, t) := -\frac{1}{4\pi} \log \frac{\|\gamma(s) - \gamma(t)\|^2}{\sin^2(\pi(s-t))} \|\gamma'(t)\| \quad \text{und} \quad k_2(s, t) := \frac{1}{4\pi} \|\gamma'(t)\|.$$

Mit $\hat{\rho} := \rho \circ \gamma$ und $\hat{g} := g \circ \gamma$ schreibt sich die Randintegralgleichung (1) nun als

$$\int_0^1 k_1(s, t) \hat{\rho}(t) dt + \int_0^1 k_2(s, t) \hat{\rho}(t) \omega(s, t) dt = \hat{g}(s) \quad \text{für } s \in [0, 1]. \quad (2)$$

Nyström-Verfahren

Wie man leicht überprüft, gilt

$$\lim_{s \rightarrow t} k_1(s, t) = -\frac{1}{4\pi} \log \frac{\|\gamma'(t)\|^2}{\pi^2} \|\gamma'(t)\|,$$

weswegen die Integralkerne k_1 und k_2 in der Integralgleichung (2) stetig sind. Somit lässt sich zum numerischen Lösen das Nyström-Verfahren anwenden, solange man das parametrisierte Gewicht korrekterweise als Integrationsgewicht in den Quadraturformeln handhabt. Wir betrachten dazu die n Quadraturknoten

$$t_j = \frac{j-1}{n} \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

und assoziieren dazu wie üblich die trigonometrischen Lagrange-Polynome L_j mittels der Eigenschaft

$$L_j(t_i) = \delta_{i,j} \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

Damit können wir für $i = 1, \dots, n$ die Gewichte und die Quadraturformeln,

$$\begin{aligned} \omega_j &:= \int_0^1 L_j(t) dt = \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \int_0^1 f(t) dt \approx \sum_{j=1}^n \omega_j f(t_j) \\ \text{und} \quad \omega_j^i &:= \int_0^1 L_j(t) \omega(t_i, t) dt \quad \text{und} \quad \int_0^1 f(t) \omega(t_i, t) dt \approx \sum_{j=1}^n \omega_j^i f(t_j), \end{aligned}$$

definieren. Dadurch führt die Bestimmung der Approximationen $\rho_j \approx \hat{\rho}(t_j) = \rho(\gamma(t_j))$ des zugehörigen Nyström-Verfahrens für (2) auf das Gleichungssystem

$$\mathbf{V}\boldsymbol{\rho} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{V} = [k_1(t_i, t_j)\omega_j + k_2(t_i, t_j)\omega_j^i]_{i,j=1}^n, \quad \mathbf{g} = [\hat{g}(t_i)]_{i=1}^n, \quad \boldsymbol{\rho} = [\rho_j]_{j=1}^n. \quad (3)$$

Falls n eine gerade Zahl mit $n = 2m$ ist, so berechnen sich die Gewichte als

$$\omega_j^i = \frac{1}{n} \left[\log 4 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{2}{k} \cos\left(2\pi k \frac{i-j}{n}\right) + \frac{1}{m} \cos\left(2\pi m \frac{i-j}{n}\right) \right];$$

ist n ungerade mit $n = 2m + 1$, erhält man dagegen

$$\omega_j^i = \frac{1}{n} \left[\log 4 + \sum_{k=1}^m \frac{2}{k} \cos\left(2\pi k \frac{i-j}{n}\right) \right].$$

Potentialauswertung

Nachdem nun eine Approximation der Dichte ρ in den Punkten t_j bekannt ist, kann der Wert von $u(\mathbf{x})$ für ein $\mathbf{x} \notin \Gamma$ approximativ mittels der Quadraturformel als

$$u_n(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^n \omega_j \frac{-1}{2\pi} \log \|\mathbf{x} - \gamma(t_j)\| \|\gamma'(t_j)\| \rho_j \quad (4)$$

berechnet werden.

Aufgabe 1.

Implementieren Sie eine Funktion

```
function rhos = nystroem_single_layer(sbp, n, g),
```

die das Gleichungssystem (3) für die diskretisierte Dichte ρ aufstellt und per \-Solver löst. Die Funktion g wird als `function handle g` übergeben, welche zeilenvektorig auswertbar sein soll. Beachten Sie dabei, dass Sie die Gewichte ω_j^i nur für $i = 1$ berechnen müssen, da Sie für die anderen Werte von i die Rotationssymmetrie,

$$\omega_j^{i+1} = \begin{cases} \omega_{j-1}^i, & \text{falls } j > 1, \\ \omega_n^i, & \text{falls } j = 1, \end{cases}$$

ausnutzen können. Wieso ist dies vorteilhaft?

Implementieren Sie weiter eine Funktion

```
function us = potential_single_layer(sbp, n, rhos, xs),
```

welche die Potentialauswertung (4) an den in den Spalten von `xs` stehenden Punkten berechnet und als Zeilenvektor zurück gibt.

Aufgabe 2.

Erstellen Sie aus der Funktion `visdata_double_layer` vom ersten Blatt die entsprechende Funktion,

```
function [vd, er] = visdata_single_layer(sbp, n, rhos, g, hd, gap, hs),
```

welche die Lösung zur Darstellung aufbereitet und den L^∞ -Fehler approximiert.

Schreiben Sie ein Skript `main2`, welches das Laplace-Problem auf der Kreisscheibe mit Radius 0.4 mit dem Dirichlet-Randdatum $g(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2$ mit Ihren obigen Methoden mit $n = 101, 202, 303, \dots, 1010$ Punkten löst, die Fehler berechnet und die Lösungen visualisiert. Wählen Sie dazu `hd` als $3 \cdot 10^{-3}$, `gap` als 5 und `hs` als 2^{-10} . Erstellen Sie ebenfalls ein `semilogy`-Plot der Fehler gegen die n .

Aufgabe 3.

Wiederholen Sie Aufgabe 2, wobei Sie das Kreisgebiet mit dem durch folgende, nicht strenförmige Parametrisierung definierten Gebiet ersetzen,

$$\gamma(s) = \begin{bmatrix} r_x \sin(2\pi s) \\ r_y (a \cos(2\pi s) + b \cos(4\pi s) + c \cos(6\pi s)) \end{bmatrix}.$$

Schreiben Sie dazu eine Funktion

```
function sbp = generate_lepidoptera_parametrisation(rx, ry, a, b, c),
```

analog zu der Funktion von Aufgabe 1 des ersten Blattes.

Wählen Sie für das Gebiet die Parameter $r_x = 0.6$, $r_y = 0.4$, $a = -1$, $b = -1/6$ sowie $c = 5/6$ und für die Visualisierung wie oben `hd` als $3 \cdot 10^{-3}$, `gap` als 5 sowie `hs` als 2^{-10} .

Passen Sie die oben gewählte Sequenz für die n an, um einen möglichst aussagekräftigen Fehlerplot zu erhalten.