



Programmierblatt 1.

Bearbeiten bis: **Sonntag, 15.03.2020**

Diese Serie von Programmierblättern hat zum Ziel, die numerische Handhabung von elliptischen PDEs als Randintegralgleichungen zu betrachten und die Implementierung einiger dafür geeigneten Methoden zu vollführen. Auf diesem ersten Blatt betrachten wir die Kombination der Darstellung der Lösung als *Doppelschichtpotential* und dem *Nyström-Verfahren* für Integralgleichungen. Diese Kombination ergibt ein simples, aber elegantes Verfahren.

Wir betrachten dafür das Laplace-Problem

$$\begin{aligned}\Delta u(\mathbf{x}) &= 0 && \text{für } \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}) && \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma := \partial\Omega,\end{aligned}$$

für ein beliebiges Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit einem C^k -glatten, beschränkten und zusammenhängenden Rand, wobei $k \geq 2$ ist.

Doppelschichtpotential

Die Lösung dieses Randwertproblems lässt sich mit der Fundamentallösung des Laplace-Operators,

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi} \log\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

als *Doppelschichtpotential*

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} = \int_{\Gamma} \frac{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{n}_{\mathbf{y}} \rangle}{2\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega$$

darstellen. Um die noch unbekannt Dichte $\rho \in L^2(\Gamma)$ bestimmen zu können, lässt sich zeigen, dass diese der Randintegralgleichung

$$\left(\mathcal{K} - \frac{1}{2}I \right) \rho = g \tag{1}$$

genügen muss, wobei $\mathcal{K}: L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$ der *Doppelschichtoperator*,

$$(\mathcal{K}\rho)(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} = \int_{\Gamma} \frac{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{n}_{\mathbf{y}} \rangle}{2\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} \rho(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma,$$

und $I: L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$ der Identitätsoperator sind.

Randparametrisierung

Wir nehmen von nun an, dass Γ durch eine C^k -glatte Parametrisierung

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \Gamma$$

mit $\gamma^{(n)}(0) = \gamma^{(n)}(1)$ für $n = 0, 1, \dots, k$ und $\gamma'(s) \neq \mathbf{0}$ für $s \in [0, 1]$ gegeben ist. Diese Annahme ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich, da die Existenz einer solchen Parametrisierung aus der Existenz eines C^k -glatten Isomorphismus $\tilde{\gamma}: \mathbb{S}^1 \rightarrow \Gamma$ folgt, wobei $\mathbb{S}^1 := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{z}\| = 1\}$ die 1-Sphäre bezeichnet. Dieser Isomorphismus $\tilde{\gamma}$ muss aufgrund der betrachteten Einschränkungen an den Rand des Gebietes existieren.

Man erhält mithilfe des Transformationsatzes

$$(\mathcal{K}\rho)(\gamma(s)) = \int_0^1 \frac{\langle \gamma(s) - \gamma(t), \mathbf{n}_{\gamma(t)} \rangle}{2\pi \|\gamma(s) - \gamma(t)\|^2} \|\gamma'(t)\| \rho(\gamma(t)) dt.$$

Definieren wir nun also $\hat{\rho} := \rho \circ \gamma$ und $\hat{g} := g \circ \gamma$, sowie

$$k(s, t) := \frac{\langle \gamma(s) - \gamma(t), \mathbf{n}_{\gamma(t)} \rangle}{2\pi \|\gamma(s) - \gamma(t)\|^2} \|\gamma'(t)\|,$$

so können wir also statt der Randintegralgleichung (1) die folgende Integralgleichung für $\hat{\rho}$ betrachten,

$$\int_0^1 k(s, t) \hat{\rho}(t) dt - \frac{1}{2} \hat{\rho}(s) = \hat{g}(s) \quad \text{für } s \in [0, 1]. \quad (2)$$

Nyström-Verfahren

Wie man leicht überprüft, gilt

$$\lim_{s \rightarrow t} k(s, t) = \frac{\langle \gamma''(t), \mathbf{n}_{\gamma(t)} \rangle}{4\pi \|\gamma'(t)\|^2},$$

weswegen der Integralkern in der Integralgleichung (2) stetig ist. Somit lässt sich zum numerischen Lösen das Nyström-Verfahren anwenden.

Dazu seien (t_j, ω_j) für $j = 1, \dots, n$ die Knoten und Gewichte einer Quadraturformel für das Intervall $[0, 1]$. Ersetzen wir das Integral mit der Quadraturformel und werten wir bei den Knotenpunkten aus, so erhalten wir

$$\sum_{j=1}^n \omega_j k(t_i, t_j) \hat{\rho}(t_j) - \frac{1}{2} \hat{\rho}(t_i) \approx \hat{g}(t_i) \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Die Approximationen $\rho_j \approx \hat{\rho}(t_j) = \rho(\gamma(t_j))$ des zugehörigen Nyström-Verfahrens ergeben sich dann als die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{j=1}^n \omega_j k(t_i, t_j) \rho_j - \frac{1}{2} \rho_i = \hat{g}(t_i) \quad \text{für } i = 1, \dots, n,$$

was sich ebenso als

$$\left(\mathbf{K} - \frac{1}{2}\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\rho} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{K} = [k(t_i, t_j)\omega_j]_{i,j=1}^n, \quad \mathbf{g} = [\hat{g}(t_i)]_{i=1}^n, \quad \boldsymbol{\rho} = [\rho_j]_{j=1}^n \quad (3)$$

schreiben lässt.

Als Quadraturformel wählen wir die zusammengesetzte Trapezregel für n Teilintervalle, welche wegen der Periodizität von γ durch

$$t_j = \frac{j-1}{n} \quad \text{und} \quad \omega_j = \frac{1}{n} \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

gegeben ist. Wegen der Periodizität von γ konvergiert sie hier mindestens mit der Ordnung $k-1$; wenn γ analytisch ist, so konvergiert sie sogar exponentiell.

Potentialauswertung

Nachdem nun eine Approximation der Dichte ρ in den Punkten t_j bekannt ist, kann der Wert von $u(\mathbf{x})$ für ein $\mathbf{x} \notin \Gamma$ approximativ mittels der Quadraturformel als

$$u_n(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^n \omega_j \frac{\langle \mathbf{x} - \gamma(t_j), \mathbf{n}_{\gamma(t_j)} \rangle}{2\pi \|\mathbf{x} - \gamma(t_j)\|^2} \|\gamma'(t_j)\| \rho_j \quad (4)$$

berechnet werden.

Aufgabe 1.

Implementieren Sie eine Funktion

```
function sbp = generate_star_shaped_parametrisation(r, dr, d2r),
```

die ein `struct sbp` zurück gibt, welches die Felder `gamma`, `dgamma`, `d2gamma` und `ngamma` besitzt. Diese Felder sollen jeweils `function handles` zu Funktionen sein, welche die sternförmige Parametrisierung $\gamma(s) := r(s) [\cos(2\pi s) \quad \sin(2\pi s)]^T$ vektorwertig auswerten können, d.h.

```
sbp.gamma([s1 ... sn]) = [\gamma(s1) ... \gamma(sn)]
sbp.dgamma([s1 ... sn]) = [\gamma'(s1) ... \gamma'(sn)]
sbp.d2gamma([s1 ... sn]) = [\gamma''(s1) ... \gamma''(sn)]
sbp.ngamma([s1 ... sn]) = [n_{\gamma(s1)} ... n_{\gamma(sn)}].
```

Dazu werden die Funktion r und ihre ersten zwei Ableitungen als `function handles` `r`, `dr` und `d2r` übergeben, welche selber zeilenvektorwertig auswertbar sein sollen.

Aufgabe 2.

Implementieren Sie eine Funktion

```
function rhos = nystroem_double_layer(sbp, n, g),
```

die das Gleichungssystem (3) für die diskretisierte Dichte ρ aufstellt und per `\`-Solver löst. Die Funktion g wird als `function handle` `g` übergeben, welche zeilenvektorwertig auswertbar sein soll.

Implementieren Sie weiter eine Funktion

```
function us = potential_double_layer(sbp, n, rhos, xs),
```

welche die Potentialauswertung (4) an den in den Spalten von `xs` stehenden Punkten berechnet und als Zeilenvektor zurück gibt.

Aufgabe 3.

Schreiben Sie ein Skript `main3`, welches das Laplace-Problem auf der Einheitskreisscheibe mit dem Dirichlet-Randdatum $g(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2$ mit Ihren obigen Methoden mit $n = 100, 200, 300, \dots, 1000$ Punkten löst.

Auf der Webseite finden Sie in dem zugehörigen Beilagen-zip die Funktionen

```
function [vd, er] = visdata_double_layer(sbp, n, rhos, g, hd, gap, hs)
und function plot_visdata(vd).
```

Die erste bereitet mithilfe Ihrer Potentialauswertungsfunktion die Lösung zur Darstellung auf und approximiert den L^∞ -Fehler; die zweite plottet diese aufbereitete Darstellung. Wählen Sie `hd` als 10^{-2} , `gap` als 5 und `hs` als 2^{-9} ; `hd` gibt dabei die Maschenweite an, `hs` wie fein die Randkurve gezeichnet wird und `gap` wieviel Maschenweite Abstand vom Rand die Gebietsauswertungen haben sollen. Erstellen Sie damit ebenfalls ein `semilogy`-Plot der Fehler gegen die n .

Wiederholen Sie die Aufgabe, wobei Sie das Einheitskreisgebiet mit einem zulässigen (sternförmigen) Gebiet Ihrer Wahl ersetzen. Unter Umständen ist es sinnvoll, die oben gewählte Sequenz für die n ebenfalls anzupassen.

Was fällt Ihnen auf, wenn Sie mithilfe der ebenfalls Ihnen zur Verfügung gestellte Funktion

```
[r, dr, d2r] = generate_paramecium(k, p)
```

auf einem nur $C^{k-1,1}$ -glatt berandeten Gebiet rechnen? Wählen Sie dazu $1 \leq k < p \leq 7$.